

BUKU AJAR

MATEMATIKA EKONOMI



Disusun oleh :

IR. RINALDI .M.M

(NIDN : 0328036101)

Fakultas Ekonomi dan Bisnis

UNIVERSITAS PERSADA INDONESIA Y.A.I

J A K A R T A

2020

KATA PENGANTAR

Matematika Ekonomi merupakan salah satu mata kuliah yang ada dalam kurikulum pendidikan tinggi bidang ekonomi. Teori dan konsep-konsep dasar matematika ekonomi menjadi bagian penting dalam ilmu ekonomi secara keseluruhan yang berguna mengatasi persoalan-persoalan ekonomi dan ilmu sosial lainnya. Bahan ajar matematika ekonomi ini bertujuan memberikan pengertian bagi mahasiswa tentang teori matematika Ekonomi yang dapat diterapkan dalam masalah-masalah ekonomi dan sosial secara luas, terutama terkait dengan bagaimana mengambil keputusan dari masalah tersebut.

Buku ajar ini disusun berdasarkan Satuan Acara Perkuliahan (SAP) mata kuliah matematika ekonomi. Materi berisi uraian (1) Fungsi liner dan aplikasinya.. (2) Fungsi kuadrat dan aplikasinya. (3)Diferensial dan aplikasinya.

Buku ajar ini disusun sedemikian rupa agar mudah dipahami dan bermanfaat bukan saja bagi mahasiswa dan bagi kalangan yang ingin menjadika referensi dalam pengajaran.

Akhirnya, penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu secara langsung maupun tidak langsung hingga tersusunnya buku ajar ini. Semoga bukut ini dapat bermanfaat dan kritik serta saran-saran untuk perbaikan buku ini kedepannya sangat diharapkan.

Jakarta, 10 Agustus 2020

P e n u l i s

Daftar Isi

	Hal
Halaman judul	i
Kata pengantar	ii
Daftar Isi	iii
BAB I. FUNGSI LINER	1
1.1. Pengertian fungsi	1
1.2. Jenis-jenis fungsi	1
1.2.1 Fungsi liner	2
1.2.2. Grafik fungsi liner	2
1.2.2.1 Dwi koordinat	5
1.2.2.2 Substitusi eliminasi	6
1.2.2.3 Koordinat lereng	6
1.2.2.4 Dwi penggal	7
1.3 Hubungan dua fungsi liner	8
1.4 Koordinat titik potong	10
BAB II APLIKASI FUNGSI LINER	
2.1 Fungsi permintaan	11
2.2 Fungsi penawaran	15
2.3 Keseimbangan pasar	18
2.4 Efek pajak terhadap keseimbangan pasar	20
2.4.1 Efek pajak spesifik terhadap keseimbangan pasar	21
2.4.2 Efek pajak proporsional terhadap keseimbangan pasar	22

2.5	Efek subsidi terhadap keseimbangan pasar	25
2.6	Fungsi konsumsi dan tabungan	27
2.7	Fungsi Biaya	30
2.8	Fungsi Penerimaan	31
2.9	Fungsi laba dan analisa BEP	32
BAB III FUNGSI KUADRAT		
3.1	Menghitung akar persamaan	35
3.2	Koordinat titik maksimum, minimum	36
3.3	Kurva fungsi kuadrat	37
BAB IV APLIKASI FUNGSI KUADRAT		
4.1	Fungsi permintaan dan penawaran	38
4.2	Keseimbangan pasar, efek pajak dan subsidi terhadap keseimbangan pasar	38
4.3	Fungsi penerimaan, Total Biaya dan Laba	39
4.4	Fungsi kepuasan total	41
BAB V DIFERENSIAL SEDERHANA		
5.1	Pengertian diferensial	43
5.2.	Kaidah-kaidah diferensial	44
5.3	Turunan dari turunan	46
5.4.	Nilai ekstrim fungsi parabola (Maksimum/Minimum)	47
Bab VI APLIKASI DIFERENSIAL		
6.1	Elastisitas	48
6.1.1	Elastisitas permintaan	48
6.1.2	Elastisitas penawaran	48
6.2	Biaya marjinal	49
6.3	Penerimaan marjinal	50

6.4	Laba maksimum	50
6.5	Laba dengan pajak spesifik	52
6.6	Efek pajak maksimum bagi monopoli	53
6.7	Penerimaan pajak maksimum	55
6.8	Marjinal utilitas	57
DAFTAR PUSTAKA		59

BAB I FUNGSI LINER

1.1. Pengertian fungsi

Fungsi adalah suatu bentuk hubungan matematis yang menyatakan hubungan fungsional (ketergantungan) antara satu variabel dengan variabel lainnya. Atau secara umum fungsi dapat diartikan suatu bentuk persamaan yang menunjukkan hubungan antara dua buah variabel atau lebih. Secara matematis hubungan suatu fungsi dapat dinyatakan dengan :

$$Y = f(X)$$

Suatu fungsi dibentuk oleh unsur-unsur variabel, koefisien dan konstanta.

Variabel adalah unsur yang sifatnya berubah-ubah dari suatu keadaan ke keadaan lain. Berdasarkan fungsinya variabel terbagi atas:

Variabel bebas (*independent variable*) adalah variabel yang menerangkan variabel lain, dimana dalam hal ini adalah variabel x.

Variabel terikat (*dependent variable*) adalah variabel yang diterangkan oleh variabel bebas, dalam hal ini adalah variabel y.

Koefisien, adalah suatu bilangan atau angka yang terletak didepan suatu variabel dan terkait dengan variabel yang bersangkutan.

Konstanta, adalah sebuah bilangan yang tidak terikat dengan suatu variabel apapun. Sebuah fungsi yang dinyatakan dalam bentuk persamaan, mungkin sekali mengandung sebuah konstanta dan mungkin pula tidak. Jika sebuah fungsi tidak mengandung konstanta maka tidaklah akan mengurangi artinya sebagai sebuah fungsi.

1.2 Jenis-jenis fungsi

Fungsi dapat digolongkan menjadi beberapa kelompok. Dalam pembahasan ini pengelompokan fungsi berdasarkan:

- Fungsi liner
- Fungsi non liner

1.2.1 Fungsi liner

Fungsi liner adalah suatu fungsi di mana variabel mempunyai pangkat paling tinggi adalah pangkat satu. Bentuk umum fungsi liner :

$$Y = f(X) \rightarrow Y = a + bX$$

Dibaca Y adalah fungsi dari X, dimana

X; variabel bebas adalah variabel yang menerangkan variabel lain

Y; variabel terikat adalah variabel yang diterangkan oleh variabel bebas

a; konstanta

b; kemiringan garis/*slope* dari garis liner

1.2.2 Grafik fungsi liner

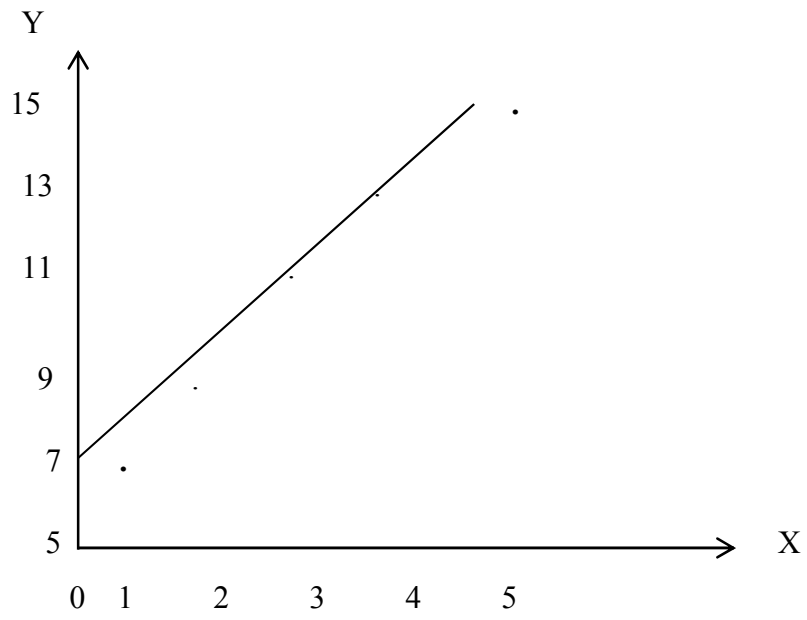
Grafik dari sebuah fungsi liner akan menghasilkan suatu garis lurus.

Grafik suatu fungsi liner dapat dihasilkan dengan cara menghitung koordinat titik-titik yang memenuhi persamaan, kemudian memindahkan kedalam sistem sumbu silang.

Contoh:

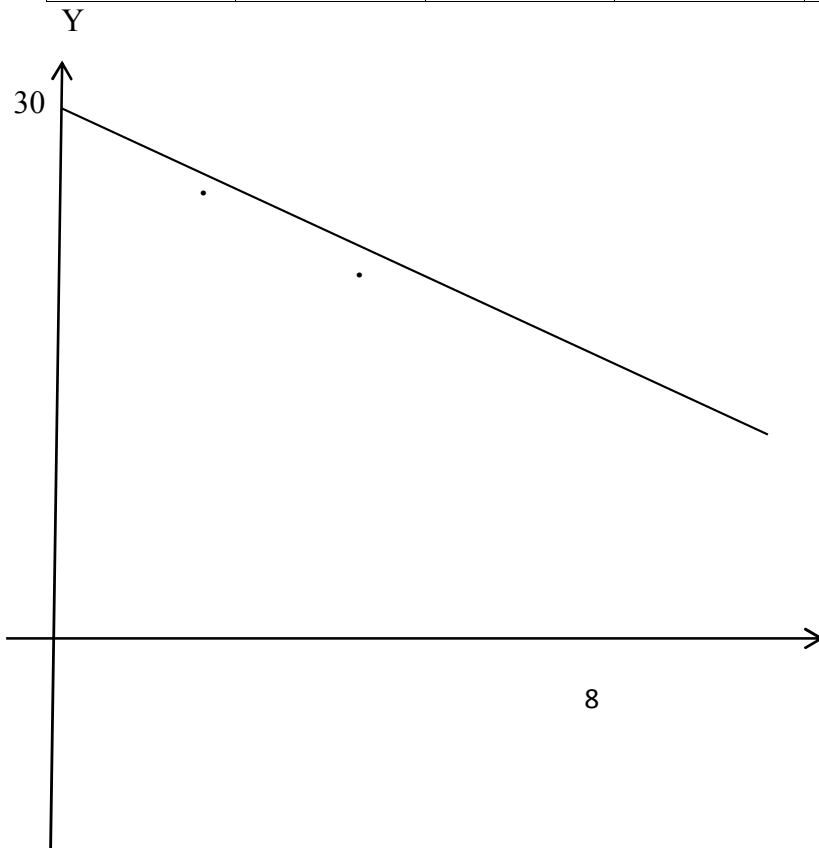
1) $y = 5 + 2x$

x	0	1	2	3	4	5
y	5	7	9	11	13	15



2) $y = 30 - 3x$

x	0	1	2	3	4
y	30	27	24	21	18



0 1 2 3 4 X

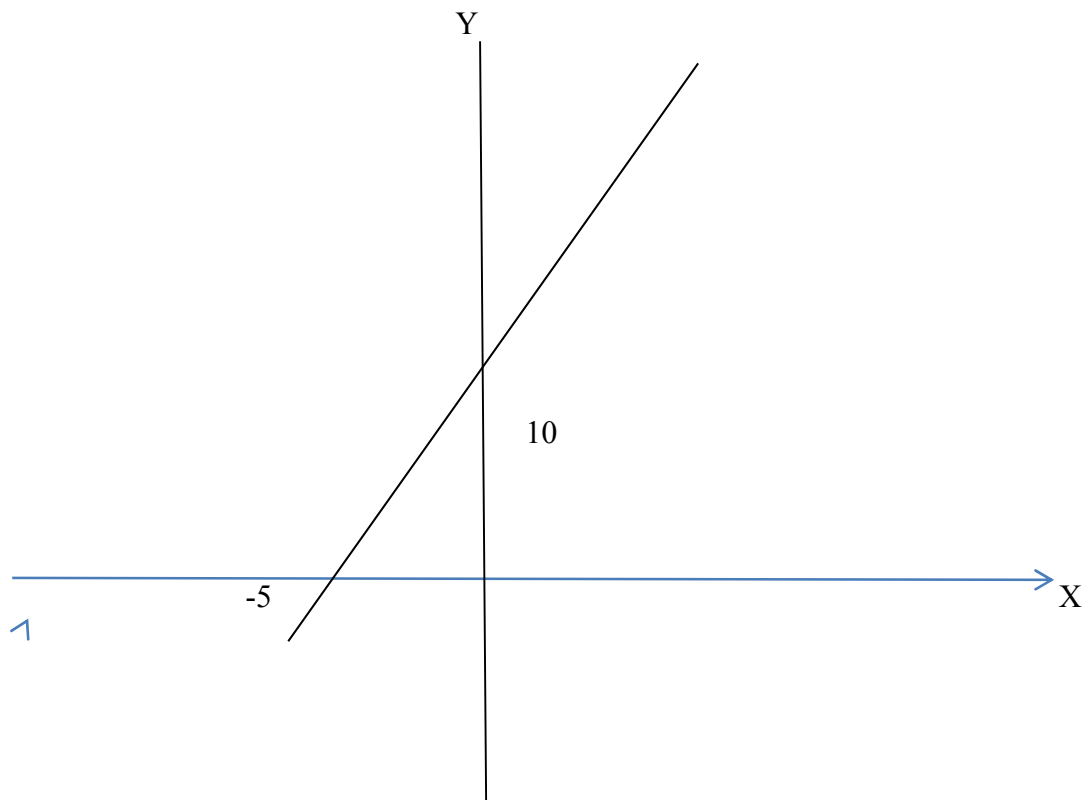
Membuat grafik fungsi liner sesungguhnya tidak perlu menghitung titik koordinat yang banyak. Dengan menghubungkan dua titik saja bisa dibuat sebuah garis lurus. Dengan menentukan titik penggal pada kedua sumbu yang memenuhi persamaan dapat digambarkan suatu grafik fungsi liner.

Contoh:

$$y = 10 + 2x$$

a = 10, penggal pada sumbu y, (0,10)

penggal pada sumbu x; $y = 0$ maka $x = -5$ maka koordinat titik (-5,0)



1.2.2 Pembentukan fungsi linier

Fungsi linier bisa dibentuk dengan beberapa metode, tergantung dari data yang tersedia. Hal tersebut tergantung dari unsur yang membentuk fungsi/persamaan linier tersebut. Adapun unsur yang membentuk persamaan linier tersebut dapat berupa; koordinat titik-titik yang memenuhi persamaan, penggal garis dengan system sumbu silang, dan kemiringan garis. Adapun metode- metode tersebut adalah:

1.2.2.1.Dwi koordinat;

Dua titik yang diketahui koordinatnya A (x ;y) dan B (x ;y), maka persamaan garis lurus yang melalui kedua titik tersebut mengikuti:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Contoh 1;

Tentukan persamaan linier yang melalui titik A (2, 4) dan B (10, 8)

Dalam hal ini $x_1 = 2$ $x_2 = 10$

$y_1 = 4$ $y_2 = 8$

$$\frac{y - 4}{8 - 4} = \frac{x - 2}{10 - 2}$$

$$\frac{y - 4}{4} = \frac{x - 2}{8}$$

$$8(y - 4) = 4(x - 2)$$

$$8y - 32 = 4x - 8, \quad 8y = 4x + 24, \quad y = 0,5x + 3$$

1.2.2.2 Substitusi – eliminasi

Bila dua titik yang diketahui koordinatnya, maka persamaan liner yang dibentuknya memenuhi persamaan :

$$y = a + bx$$

contoh 2: Titik A (4 , 2) dan koordinat titik B (10 , 20)

$$2 = a + 4 b$$

$$\underline{20 = a + 10 b -}$$

$$- 18 = - 6 b, \quad b = 3$$

$$2 = a + 4 (3), \quad a = - 10$$

Persamaan garis melalui titik A dan titik B adalah $y = - 10 + 3 x$

1.2.2.3 Koordinat- lereng

Suatu persamaan liner juga dapat dibentuk apabila diketahui koordinat titik A (x , y) yang dilalui persamaan liner tersebut dan lereng/kemiringan garis (b), yang melalui titik tersebut. Persamaan liner dapat dihitung dengan:

$$y - y = b (x - x)$$

Contoh 3;

Titik A (2 , 8), melalui titik tersebut diketahui kemiringan garisnya, $b = 2$, maka persamaan liner yang melalui titik tersebut adalah :

$$y - 8 = 2 (x - 2)$$

$$y - 8 = 2 x - 4$$

$$y = 2 x + 4$$

Lereng/kemiringan sebuah garis lurus merupakan perbandingan sisi tegak (Δy) dengan sisi datar (Δx)

$$b = \Delta y / \Delta x = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$$

Seperti contoh 1 dan 2 diatas, maka cara dwi koordinat dan substitusi-eliminasi dapat dikerjakan dengan cara koordinat lereng dengan menghitung terlebih dahulu nilai lerengnya.

Titik A (2 , 4), titik B (10, 8)

$$b = (8 - 4) / (10 - 2)$$

$b = 4/8 = 0,5$, dengan menggunakan salah satu titik yang telah diketahui kordinatnya maka persamaan fungsi linier tersebut adalah:

Jika melalui A (2 , 4)

$$y - y_1 = b (x - x_1)$$

$$y - 4 = 0,5 (x - 2)$$

$$y - 4 = 0,5 x - 1$$

$$y = 0,5 x + 3$$

1.2.2.4.Cara dwi-penggal

Sebuah persamaan linier dapat pula dibentuk apabila diketahui penggal garis pada masing-masing sumbu, yaitu penggal pada sumbu vertikal (ketika $x = 0$) dan penggal pada sumbu horisontal (ketika $y = 0$), maka persamaan liniernya adalah :

$$Y = a - a/c.X$$

; a = penggal vertikal, c = penggal horisontal

Contoh 4:

Andaikan penggal sebuah garis pada sumbu vertikal dan sumbu horizontal masing-masing 10 dan - 8 , maka persamaan liniernya adalah :

$$y = a - a/c x$$

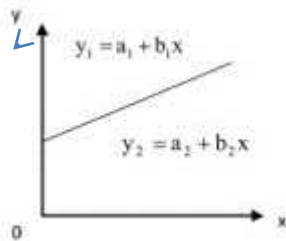
$$y = 10 - 10/- 8 x$$

$$y = 10 + 1,25 x$$

1.3 Hubungan dua fungsi linear

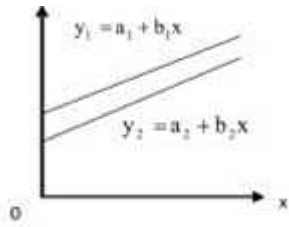
1.3.1 Berimpit

Dua garis lurus akan berimpit apabila persamaan garis yang satu merupakan kelipatan dari garis yang lain. Dengan demikian , garis $y_1 = a_1 + b_2x$ akan berimpit dengan garis $y_2 = a_2 + b_2x$, jika $y_1 = ny_2$; $a_1 = na_2$ dan $b_1 = nb_2$



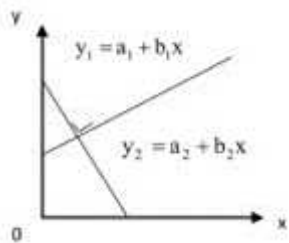
1.3.2 Sejajar

Dua garis lurus akan sejajar apabila lereng/gradien garis yang satu sama dengan lereng/gradien dari garis yang lain. Dengan demikian , garis $y_1 = a_1 + b_1x$ sejajar dengan garis $y_2 = a_2 + b_2x$ garis , jika $b_1 = b_2$



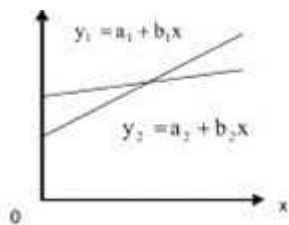
1.3.3 Tegak lurus

Dua garis lurus akan saling tegak lurus apabila lereng/gradien garis yang satu merupakan kebalikan dari lereng/gradien dari garis yang lain dengan tanda yang berlawanan. Dengan demikian , garis $y_1 = a_1 + b_1x$ tegak lurus dengan garis $y_2 = a_2 + b_2x$, jika atau $b_1 \cdot b_2 = -1$



1.2.3.4 Berpotongan

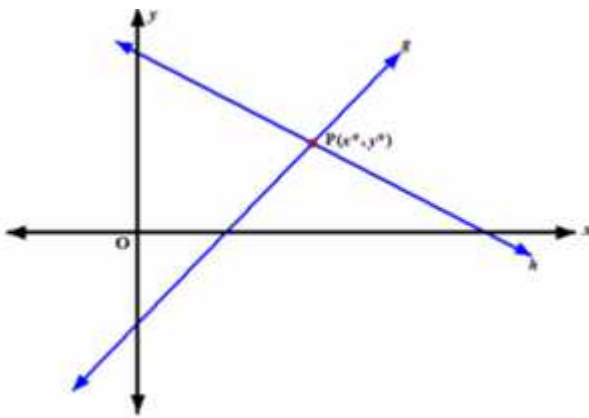
Dua garis lurus akan berpotongan apabila lereng/gradien garis yang satu tidak sama dengan lereng/gradien dari garis yang lain. Dengan demikian , garis $y_1 = a_1 + b_1x$ akan berpotongan dengan garis $y_2 = a_2 + b_2x$, jika $b_1 \neq b_2$



1.4. Koordinat titik potong

Jika terdapat dua buah garis sebidang yang tidak sejajar maka kedua garis tersebut akan berpotongan. Jika kedua garis itu ditempatkan pada sistem koordinat Kartesius, kita dapat menentukan koordinat titik potong kedua garis tersebut.

Misalkan diketahui garis dengan persamaan $y = a + b x$ dan garis yang tidak sejajar dengan persamaan $y = a + b x$. Misalkan kedua garis itu berpotongan di $E(x_e, y_e)$. (Lihat gambar di bawah.)



Titik E, merupakan anggota dari y dan juga anggota dari y , maka pada titik E berlaku kaidah;

$$y = y$$

Contoh 5: Tentukan koordinat titik potong garis $y = 2 x + 4$ dan $y = - 3 x + 24$.

$$y = y$$

$$2 x + 4 = - 3 x + 24$$

$$2 x + 3 x = 24 - 4$$

$$x = 5$$

$$y = 2 (5) + 4 = 14$$

Koordinat titik potong (5 , 12)

BAB II APLIKASI FUNGSI LINER

2.1 Fungsi permintaan (*demand*)

Fungsi Permintaan adalah persamaan yang menunjukkan hubungan antara jumlah suatu barang yang diminta dengan faktor-faktor yang mempengaruhinya. Fungsi permintaan adalah suatu kajian matematis yang digunakan untuk menganalisa perilaku konsumen dan harga. Fungsi permintaan mengikuti hukum permintaan yaitu apabila harga suatu barang naik maka permintaan akan barang tersebut menurun dan sebaliknya apabila harga barang turun maka permintaan akan barang tersebut meningkat.

Jadi hubungan antara harga dan jumlah barang yang diminta memiliki hubungan yang terbalik, sehingga lereng dari fungsi permintaan (b) akan selalu negatif.

Bentuk umum fungsi permintaan dengan dua variabel adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} Q_d = a - bP_d & \longrightarrow Q_d = f(P_d) & \text{atau} \\ P_d = -1/b (- a + Q_d) & \longrightarrow P_d = f(Q_d) \end{aligned}$$

dimana :

a = konstanta

b = $\Delta Q_d / \Delta P_d$

P_d = harga barang per unit yang diminta

Q_d = jumlah unit barang yang diminta

Syarat, $P \geq 0$; $Q \geq 0$

Contoh 6.

Pada saat harga Jeruk Rp. 5.000 /kg permintaan akan jeruk tersebut sebanyak 1000 kg, tetapi pada saat harga jeruk meningkat menjadi Rp. 7.000 / kg permintaan akan jeruk menurun menjadi 600kg, buatlah fungsi permintaannya, berapa jumlah permintaan pada tingkat harga Rp 6.000/.kg dan berapa harga jeruk jika permintaan 750 kg.

Pembahasan :

Cara Dwi koordinat:

$$P = \text{Rp. } 5.000 \quad Q = 1000 \text{ Kg}$$

$$P = \text{Rp. } 7.000 \quad Q = 600 \text{ Kg}$$

untuk menentukan fungsi permintaannya maka digunakan rumus persamaan garis melalui dua titik, yakni :

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$y - y_1 \quad x - x_1$$

dengan mengganti $x = Q$ dan $y = P$ maka didapat,

$$\frac{P - P_1}{P_2 - P_1} = \frac{Q - Q_1}{Q_2 - Q_1}$$

$$P - P_1 \quad Q - Q_1$$

mari kita masukan data diatas kedalam rumus :

$$\frac{P - 5.000}{7.000 - 5.000} = \frac{Q - 1000}{600 - 1000}$$

$$\frac{P - 5.000}{2.000} = \frac{Q - 1000}{-400}$$

$$P - 5.000 (-400) = 2.000 (Q - 1000)$$

$$-400P + 2.000.000 = 2000Q - 2.000.000$$

$$2000Q = 2000.000 + 2.000.000 - 400P$$

$$Q = 1/2000 (4.000.000 - 400P)$$

$$Q = 2000 - 0,2P$$

=====

Jadi dari kasus diatas diperoleh fungsi permintaan $Q_d = 2000 - 0,2P_d$

$$P_d = -5 Q + 10.000$$

Cara koordinat lereng:

$$b = \Delta P / \Delta Q = (P_2 - P_1) / (Q_2 - Q_1)$$

$$y - y_1 = b(x - x_1) \quad \longrightarrow \quad P - P_1 = b(Q - Q_1)$$

$$b = (7.000 - 5.000) / (600 - 1.000)$$

$$b = 2000 / -400 = -5$$

$$P - 5.000 = -5(Q - 1.000)$$

$$P - 5.000 = -5Q + 5000$$

$$P_d = -5Q + 10.000 \quad \text{atau} \quad Q_d = -0,2P + 2.000$$

Latihan soal

1. Pada saat harga Jeruk Rp. 5.000 /kg permintaan akan jeruk tersebut sebanyak 1000 kg, tetapi pada saat harga jeruk meningkat menjadi Rp. 7.000 / kg permintaan akan jeruk menurun menjadi 600kg, buatlah fungsi permintaannya, berapa jumlah permintaan pada tingkat harga Rp 6.000/.kg dan berapa harga jeruk jika permintaan 750 kg.

2. Permintaan barang A pada tingkat harga 750/unit, permintaan terhadap barang tersebut sebanyak 100 unit. Jika harga barang tersebut turun sebesar 250/unit permintaannya bertambah sebanyak 50 unit. Dari pernyataan tersebut buatlah fungsi permintaan barang, dan berapa jumlah permintaan pada tingkat harga 400/unit.

3. Pada tingkat harga 6000/unit jumlah permintaan konsumen terhadap suatu barang sebanyak 10 unit. Bila harga barang tersebut turun sebesar 3000/unit permintaan konsumen terhadap barang tersebut bertambah sebesar 40 unit. Bila fungsi permintaan konsumen terhadap barang tersebut adalah $P = f(Q)$, maka nilai b dari fungsi tersebut adalah = ? (jelaskan artinya dan jika $Q = 60$ unit maka tentukan tingkat harga barang tersebut. *Jika fungsi permintaan mengikuti $Q = f(P)$, jelaskan arti

kemiringan/slope dari fungsi tersebut, jika harga barang 5.000/unit berapa jumlah permintaan konsumen.

4. Konsumen barang elektronik tidak sanggup membeli pada tingkat harga 10.000.000/unit, tetapi bila harga barang diturunkan sebesar 500.000/unit permintaan konsumen terhadap barang tersebut sebanyak 100 unit. Bagaimana/berapa pengaruh permintaan terhadap harga barang, buat fungsi permintaan barang dan berapa harga barang jika permintaan konsumen sebanyak 80 unit.

5. Pada tingkat harga Rp 1.500,-/unit, jumlah permintaan konsumen terhadap barang tersebut sebanyak 50 unit. Jika barang tersebut harganya turun menjadi Rp 1.000,-/unit jumlah permintaan konsumen bertambah sehingga jumlahnya menjadi 100 unit.

1. Dari pernyataan diatas maka kemiringan/slope dari fungsi permintaan tersebut adalah :

a. $b = 30$

c. $b = - 30$

b. $b = 20$

d. $b = - 20$

2.Sedangkan intersep dari fungsi permintaan diatas adalah :

a. $a = 1.500$

c. $a = 1.000$

b. $a = 2.500$

d. $a = 3.000$

3Fungsi permintaan dari pernyataan diatas adalah:

a. $P = 30 Q + 1.500$

c. $P = - 30 Q + 1.000$

b. $P = 20 Q + 2.500$

d. $P = - 20 Q + 3.000$

4Jika permintaan konsumen terhadap barang tersebut sebanyak 125 unit maka harga barang tersebut adalah:

a. $P = 200$

c. $P = 400$

b. $P = 500$

d. $P = 800$

2.2 Fungsi penawaran (*supply*)

Fungsi penawaran adalah suatu fungsi yang menunjukkan hubungan antara harga barang atau jasa yang ada dipasar dengan kuantitas penawaran yang ditawarkan oleh seorang produsen.

Fungsi penawaran digunakan oleh produsen dengan tujuan untuk menganalisa kemungkinan-kemungkinan banyaknya barang yang akan diproduksi.

Fungsi penawaran mengikuti hukum penawaran bila harga barang naik, dengan asumsi *ceteris paribus* (faktor-faktor lain dianggap tetap), maka jumlah barang yang ditawarkan akan naik, dan sebaliknya apabila harga barang menurun jumlah barang yang ditawarkan juga menurun. Jadi, dalam fungsi penawaran antara harga barang dan jumlah barang yang ditawarkan oleh produsen memiliki hubungan positif, karenanya gradien (b) dari fungsi penawaran selalu positif.

Bentuk umum dari fungsi penawaran linear adalah sebagai berikut:

$$Q_s = a + bP_s$$

Keterangan :

a dan b = konstanta, dimana b harus bernilai positif.

$$b = \Delta Q_s / \Delta P_s$$

P_s = harga barang per unit yang ditawarkan

Q_s = jumlah unit barang yang ditawarkan

Syarat, $P_s \geq 0$, $Q_s \geq 0$,

Contoh 7.

Pada tingkat harga Rp 2.000,-/unit sebuah perusahaan menawarkan produksinya sebanyak 75 unit. Akan tetapi jika harga naik menjadi Rp 5.000,-/unit jumlah produk yang ditawarkan sebanyak 150 unit, tentukan

- Fungsi penawaran produsen
- Jumlah barang pada tingkat harga Rp 4.000,-/unit
- Harga barang jika jumlah yang ditawarkan sebanyak 100 unit

Penyelesaian: Dwi koordinat

$$Q = 75 \quad Q = 150 \quad P = 2.000 \quad P = 5.000$$

$$\frac{P-2.000}{5.000-2.000} = \frac{Q-75}{150-75}$$

$$\frac{P-2.000}{3.000} = \frac{Q-75}{75}$$

$$75(P - 2.000) = 3.000(Q - 75)$$

$$P = 40Q - 1.000$$

Cara Koordinat lereng

$$b = \frac{5.000-2.000}{150-75} = 40$$

$$P - 2.000 = 40(Q - 75)$$

$$P = 40Q - 1.000$$

Latihan soal

1. Pada tingkat harga Rp 2.000,-/unit sebuah perusahaan menawarkan produksinya sebanyak 75 unit. Akan tetapi jika harga naik menjadi Rp 5.000,-/unit jumlah produk yang ditawarkan sebanyak 150 unit, tentukan Fungsi penawaran produsen. Jumlah barang pada tingkat harga Rp 4.000,-/unit dan harga barang jika jumlah yang ditawarkan sebanyak 100 unit.

2. Fungsi penawaran produsen barang kebutuhan rumah tangga ditunjukkan oleh fungsi $P = 25Q - 300$, berdasarkan fungsi tersebut maka; Kemiringan/slope dari fungsi penawaran tersebut, Arti dari nilai kemiringan tersebut adalah, dan harga barang jika ditawarkan sebanyak 30 unit.

3. Produsen komponen elektronik menawarkan produknya pada tingkat harga Rp 30.000,-/unit sebanyak 500 unit. Bila harga naik menjadi Rp 45.000,-/unit maka jumlah barang yang ditawarkan naik menjadi 2000 unit..Dari pernyataan diatas buatlah fungsi penawaran $Q = f(P)$, Apabila harga barang tersebut ditawarkan sebesar Rp 35.000,-/unit, hitunglah jumlah barang yang ditawarkan.

4. Fungsi penawaran produsen barang kebutuhan rumah tangga ditunjukkan oleh fungsi $P = 25Q - 300$, berdasarkan fungsi tersebut maka; Harga barang tersebut jika ditawarkan sebanyak 30 unit, Kemiringan/slope dari fungsi penawaran serta jelaskam artinya

5. Produsen komponen elektronik menawarkan produknya pada tingkat harga Rp 30.000,-/unit sebanyak 500 unit. Bila harga naik menjadi Rp 45.000,-/unit maka jumlah barang yang ditawarkan naik menjadi 2000 unit, pertanyaan;

1. Dari pernyataan diatas maka fungsi penawaran $Q = f(P)$ adalah:

a. $Q = 10P + 2.500$

c. $Q = 10P - 2.500$

b. $Q = 0,1P - 2500$

d. $Q = 0,1P + 3500$

2. Arti dari nilai koefisien kemiringan/slope fungsi diatas adalah:

a. Setiap kenaikan satu satuan harga maka penawaran naik sebesar 2.500 unit

b. Setiap kenaikan satu satuan harga maka penawaran naik sebesar 10 unit

c. Setiap kenaikan satu satuan harga maka penawaran naik sebesar 250 unit

d. Setiap kenaikan sepuluh satuan harga maka penawaran naik sebesar satu unit

3. Jika diberikan subsidi sebesar 100/unit, maka fungsi penawaran setelah subsidi adalah:

a. $Q = 10 P + 1.500$

c. $Q = 10 P - 3.500$

b. $Q = 0,1 P - 2.510$

d. $Q = 0,1 P - 3.490$

4. Apabila harga barang tersebut ditawarkan sebesar Rp 35.000,-/unit, maka jumlah barang yang ditawarkan sebanyak:

a. $Q = 2000$ unit

c. $Q = 3.000$ unit

b. $Q = 3.500$ unit

d. $Q = 6.000$ unit

2.3 Keseimbangan pasar (market equilibrium)

Pasar suatu jenis barang dikatakan berada dalam keseimbangan apabila jumlah barang yang diminta dipasar tersebut sama dengan jumlah barang yang ditawarkan. Secara matematik dan grafik hal ini ditunjukkan oleh persamaan :

$$FS = FD$$

(Fungsi Penawaran = Fungsi Permintaan)

Yaitu pada perpotongan kurva permintaan dengan kurva penawaran. Pada posisi keseimbangan pasar ini tercipta harga keseimbangan (equilibrium price) dan Jumlah keseimbangan (equilibrium quantity).

Harga keseimbangan ditentukan oleh kekuatan permintaan dan penawaran. Penjual dan pembeli biasanya akan selalu mengambil tindakan yang bertujuan untuk mencapai keseimbangan antara permintaan dan penawaran.

Syarat-syarat Titik Keseimbangan Pasar

Titik keseimbangan pasar bagi barang dan jasa tertentu harus memenuhi syarat sebagai berikut:

1. Hanya berlaku untuk nilai-nilai (p dan q) yang positif.
2. Hanya berlaku untuk titik yang memenuhi syarat bagi (sesuai dengan ciri-ciri dari) Kurva Permintaan maupun Kurva Penawaran.

Jadi keseimbangan pasar hanya ada satu. Walaupun mungkin ada 2 titik potong antara Fungsi Permintaan dan Fungsi Penawaran (secara matematis) tetapi hanya ada satu titik potong antara Kurva Permintaan dan Kurva Penawaran, dengan kata lain hanya satu yang berlaku sebagai titik keseimbangan pasar.

Contoh: Permintaan konsumen terhadap suatu barang ditunjukkan oleh fungsi $P_d = - 10 Q + 700$. Sedangkan pihak produsen menawarkan produknya mengikuti fungsi $P_s = - 5 Q + 100$. Hitunglah jumlah dan harga barang tersebut pada tingkat keseimbangan pasar.

Penyelesaian: Keseimbangan pasar $P_d = P_s$

$$- 10 Q + 700 = 5 Q + 100$$

$$- 15 Q = 600$$

$$\text{Keseimbangan pasar} \quad Q_e = 40$$

$$P_e = 5(40 + 100) = 300$$

Pasar suatu jenis barang dikatakan berada dalam keseimbangan apabila jumlah barang yang diminta dipasar tersebut sama dengan jumlah barang yang ditawarkan. Secara matematik dan grafik hal ini ditunjukkan oleh persamaan :

$$F_s = F_D$$

(Fungsi Penawaran = Fungsi Permintaan)

Yaitu pada perpotongan kurva permintaan dengan kurva penawaran. Pada posisi keseimbangan pasar ini tercipta harga keseimbangan (equilibrium price) dan Jumlah keseimbangan (equilibrium quantity).

Latihan soal

1. Fungsi permintaan dan penawaran suatu barang ditunjukkan oleh $P_d = - 3 Q + 80$ dan $P_s = 2 Q +$ Hitunglah jumlah dan harga barang pada tingkat kesimbangan pasar dan buat grafik dari pernyataan diatas.

2. Fungsi permintaan suatu barang $Q = - 0,2 P + 25$, sedangkan fungsi penawarannya adalah $Q = 0,1 P - 5$. Hitung jumlah dan harga barang pada tingkat keseimbangan pasar sertakan grafik dari pernyataan tersebut.

3. Konsumen suatu barang melakukan permintaan sebanyak 100 unit pada tingkat harga 1.500/unit, jika jumlah permintaan naik menjadi 200 unit harga barang menjadi 500/unit. Sedangkan pihak produsen menawarkan produknya sebanyak 60 unit pada tingkat harga 1.400/unit, apabila harga naik menjadi 2.750/unit jumlah barang yang ditawarkan sebanyak 150 unit. Hitunglah harga dan jumlah barang pada tingkat keseimbangan pasar.

4. Konsumen barang A tidak membeli barang tersebut pada tingkat harga 1.00/unit, jika harga turun sebesar 40/unit permintaan konsumen sebanyak 8 unit. Sedangkan pihak produsen barang tidak menawarkan produknya pada tingkat harga 10/unit, tetapi pada tingkat harga 50/unit jumlah barang yang ditawarkan sebanyak 10 unit. Berapa jumlah dan harga barang pada tingkat keseimbangan pasar, sertakan grafiknya.

5. Pada tingkat harga 70/unit permintaan konsumen sebanyak 5 unit, jika permintaan konsumen naik sebanyak 10 unit harga turun sebesar 20/unit. Di pihak produsen, menawarkan barangnya sebanyak 5 unit pada tingkat harga 35/unit, jika harga dinaikan sebesar 45/unit jumlah barang yang ditawarkan bertambah sebanyak 15 unit. Hitunglah jumlah dan harga barang pada tingkat keseimbangan pasar, buat grafik pernyataan di atas.

2.4 Efek pajak terhadap keseimbangan pasar

Pajak merupakan pungutan yang ditarik pemerintah (negara) terhadap wajib pajak tanpa mendapat balas jasa langsung. Ada dua jenis pajak berdasarkan cara penarikannya, yaitu pajak langsung dan pajak tidak langsung.

Pajak langsung adalah pajak yang langsung dipungut dari wajib pajak tanpa pihak perantara, seperti Pajak Penghasilan (PPh), Pajak Bumi dan Bangunan (PBB), Pajak Kekayaan, Pajak Kendaraan, Pajak Perusahaan, dan sebagainya.

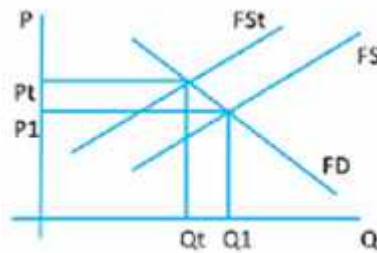
Pajak tak langsung adalah pajak yang tidak langsung dipungut dari wajib pajak, tetapi melalui wajib pungut yang selanjutnya disetorkan kepada pemerintah (negara), seperti Pajak Pertambahan Nilai (PPn), Pajak Penjualan, Pajak Tontonan, Cukai, Pajak Barang Mewah, dan sebagainya.

Pajak tak langsung seperti PPn dan cukai akan berpengaruh langsung terhadap harga yang ditawarkan oleh produsen sebagai akibat pembebanan pajak terhadap konsumen, sehingga akan mengubah fungsi penawaran dan keseimbangan pasar.

Pajak adalah jenis pungutan yang dilakukan pemerintah terhadap produsen/penjual sehingga beban pajak akan menambah besarnya biaya yang harus dipikul oleh produsen/penjual. Akibatnya harga yang ditawarkan akan naik, kenaikannya sebesar pajak yang dibebankan. Ada dua macam pajak, yaitu:

2.4.1. Pajak Perunit

Pajak per unit adalah pajak yang dikenakan terhadap suatu barang yang besarnya tetap untuk setiap unit barang.



Fungsi sebelum pajak : $D \rightarrow P_d = aQ + b$
 Fungsi setelah pajak : $S_t \rightarrow P_t = (aQ + b) + t$

Contoh :

Fungsi permintaan dan penawaran suatu barang ditunjukkan oleh $P_d = -3Q + 80$ dan $P_s = 2Q + 5$, Hitunglah jumlah dan harga barang sebelum dan sesudah dibebankan pajak sebesar 5/unit.

Penyelesaian: Sebelum pajak;

$$\begin{aligned} E; \quad P_d &= P_s \\ -3Q + 80 &= 2Q + 5 \\ -3Q - 2Q &= 5 - 80 \\ Q_e &= 15; P_e = 2(15) + 5 = 35 \end{aligned}$$

Setelah pajak

$$\begin{aligned} P_d &= -3Q + 80 \\ P_t &= 2Q + 5 + 5 = 2Q + 10 \\ E_t; \quad P_d &= P_t \\ -3Q + 80 &= 2Q + 10 \\ -3Q - 2Q &= 10 - 80 \\ Q_t &= 14, P_t = 2(14) + 10 = 38 \end{aligned}$$

Selisih harga setelah dan sebelum pajak disebut Pajak yang ditanggung Konsumen (S_k). $S_k = P_t - P_e$

Selisih Pajak yang dibebankan dengan Pajak yang ditanggung Kosumen disebut Pajak yang ditanggung produsen (S_p). $S_p = t - S_k$

Total pajak yang diterima pemerintah (T_t) adalah kelipatan pajak/unit dengan jumlah barang yang terjual. $T_t = t \cdot Q_t$

$$S_k = 38 - 35 = 3$$

$$S_p = 5 - 3 = 2$$

$$T_t = 3(14) = 42$$

Fungsi permintaan suatu barang $Q = -0,2 P + 25$, sedangkan fungsi penawarannya adalah $Q = 0,1 P - 5$. Jika terhadap barang tersebut dibebankan pajak sebesar 15/unit. Hitung keseimbangan pasar sebelum dan sesudah dibebankan pajak.

Penyelesaian: Sebelum pajak

$$E; Q_d = Q_s$$

$$-0,2 P + 25 = 0,1 P - 5$$

$$-0,2 P - 0,1 P = -5 - 25$$

$$-0,3 P = -30$$

$$P_e = 100; Q_e = 0,1(100) - 5 = 5$$

Setelah pajak

$$D; Q_d = -0,2 P + 25$$

$$S; Q_t = 0,1P - 5 - 0,1(15) \quad Q_t = 0,1 P - 6,5$$

$$E_t; -0,2 P + 25 = 0,1 P - 6,5$$

$$-0,3 P = -31,5$$

$$P_t = 105 \quad \text{dan} \quad Q_t = -0,2(105) + 25 = 4$$

$$S_k = 105 - 100 = 5$$

$$S_p = 5 - 4 = 1$$

$$T_t = 15 (4) = 60$$

2.4.2.Pajak Persentase/proporsional

Pajak Persentase adalah pajak yang dipungut pemerintah dengan persentase yang tetap terhadap penjualan. Pajak persentase (t).

Fungsi sebelum pajak : $FD \rightarrow P = aQ + b$

Setelah Pajak : $FSr \rightarrow P = aQ + b + t(P)$

Contoh:

Permintaan konsumen ditunjukkan oleh fungsi $P = -4 Q + 80$, sedangkan fungsi penawaran fungsinya adalah $P = 2 Q + 20$. Jika dibebankan pajak 10 %, hitung Pajak yang ditanggung konsumen, Pajak yang ditanggung produsen dan Total pajak

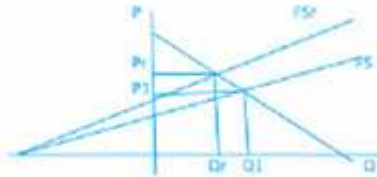
Sebelum pajak E; $P_s = P_d$
 $-4Q + 80 = 2Q + 20$
 $-6Q = -60$
 $Q_e = 10$ dan $P_e = 2(10) + 20 = 40$

Setelah pajak; D: $P_s = -4Q + 80$
S: $P_t = 2Q + 20 + 0,1(2Q + 20)$
 $P_t = 2,2Q + 22$
Et; $-4Q + 80 = 2,2Q + 22$
 $6,6Q = 58$
 $Q_t = 8,8$ $P_t = 2,2(8,8) + 22 = 41,36$

$$S_k = 41,36 - 40 = 1,36$$

$$S_p = 0,1(40) - 1,36 = 2,64$$

$$T_t = 0,1(40)(8,8) = 35,2$$



Latihan soal

1. Fungsi permintaan dan penawaran terhadap suatu barang adalah $P + 5Q = 200$ dan $-0,25P + Q = 17,5$. Jika dibebankan pajak sebesar 18/unit, hitunglah jumlah dan harga barang pada tingkat keseimbangan pasar sebelum dan sesudah dibebani pajak.
2. Fungsi permintaan suatu barang $Q = -0,2P + 25$, sedangkan fungsi penawarannya adalah $Q = 0,1P - 5$. Jika terhadap barang tersebut dibebankan pajak sebesar 15/unit. Hitung keseimbangan pasar sebelum dan sesudah dibebankan pajak.
3. Permintaan konsumen terhadap barang elektronik ditunjukkan oleh fungsi $Q + 6P = 32.000$, sedangkan pihak produsen barang tersebut menawarkan mengikuti fungsi $P - 0,5Q = 3.000$. Pemerintah membebankan pajak terhadap barang tersebut sebesar 200/unit, hitunglah; pajak yang ditanggung konsumen, pajak yang ditanggung produsen dan total pajak yang disetorkan pada pemerintah.

4. Permintaan dan penawaran barang “XYZ” ditunjukkan oleh fungsi $P = - 8 Q + 2.500$ dan $P = 4Q + 100$. Untuk mengurangi beban ekonomi masyarakat pemerintah membebankan pajak terhadap barang tersebut sebesar 120/unit. Hitunglah pajak yang ditanggung konsumen, pajak yang ditanggung produsen dan total pajak.

5. Produsen komponen automotif fungsi penawarannya ditunjukkan oleh fungsi $P = 3 Q + 65.000$. Sedangkan permintaan konsumen terhadap komponen tersebut adalah $P = - 5 Q + 5.000$. Jika pemerintah membebankan pajak terhadap komponen tersebut sebesar 1.200/ unit, hitunglah; pajak yang ditanggung konsumen, pajak yang ditanggung produsen serta total pajak yang diterima pemerintah.

2.5. Efek subsidi terhadap keseimbangan pasar

Subsidi merupakan kebalikan dari pajak, pengaruhnya terhadap keseimbangan pasar berbalikan dengan pengaruh pajak. Subsidi yang diberikan atas produksi/penjualan suatu barang menyebabkan harga jual barang tersebut menjadi rendah. Dengan adanya subsidi, produsen merasa ongkos produksinya menjadi lebih kecil sehingga bersedia menjual lebih murah.

Fungsi sebelum subsidi : $FS \rightarrow P = aQ + b$

Fungsi setelah subsidi : $FSs \rightarrow P = aQ + b - S$

Contoh:

Fungsi permintaan dan penawaran suatu barang ditunjukkan oleh $P_d = - 3 Q + 80$ dan $P_s = 2 Q + 5$, Hitunglah jumlah dan harga barang sebelum dan sesudah diberikan subsidi sebesar 5/unit Hitunglah harga sebelum dan sesudah subsidi

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} \text{Sebelum subsidi;} \quad E; \quad P_d &= P_s \\ - 3 Q + 80 &= 2 Q + 5 \\ - 3 Q - 2 Q &= 5 - 80 \\ Q_e &= 15; \quad P_e = 2(15) + 5 = 35 \end{aligned}$$

Setelah subsidi; D $P_d = - 3 Q + 80$

S $P_s = 2Q + 5 - 5$

$$P_s = 2Q$$

Es : $3 Q + 80 = 2 Q$

$$- 3 Q - 2 Q = - 80$$

$$Q_s = 16; \quad P_s = 2(16) = 32$$

Selisih harga sebelum dengan sesudah subsidi disebut Subsidi yang dinikmati Konsumen (Sk), $S_k = P_e - P_s$.

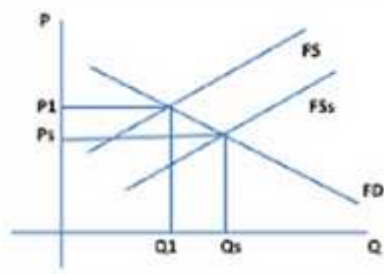
Selisih Subsidi yang diberikan dengan Subsidi yang dinikmati Konsumen disebut Subsidi yang dinikmati Produsen (SP), $S_p = S - S_k$

Total Subsidi (Ts) merupakan kelipatan Subsidi/unit terhadap unit yang terjual setelah subsidi, $T_s = S \cdot Q_s$

$$S_k = 35 - 32 = 3$$

$$S_p = 5 - 3 = 2$$

$$T_s = 5(16) = 80$$



Latihan soal

1. Permintaan dan penawaran barang “XYZ” ditunjukkan oleh fungsi $P = - 8 Q + 2.500$ dan $Q = 0,25 P - 25$. Untuk mengurangi beban ekonomi masyarakat pemerintah memberikan subsidi terhadap barang tersebut sebesar 240/unit. Hitunglah keseimbangan pasar sebelum dan sesudah subsidi, subsidi yang dinikmati konsumen, produsen dan total subsidi.

2. Permintaan konsumen terhadap barang kebutuhan pokok ditunjukkan oleh fungsi $Q + 6P = 32.000$, sedangkan pihak produsen barang tersebut menawarkan mengikuti fungsi $P - 0,5Q = 3.000$. Pemerintah memberikan subsidi terhadap barang tersebut sebesar 100/unit, hitunglah: Harga dan jumlah barang pada tingkat keseimbangan pasar sebelum dan sesudah subsidi.

3. Fungsi permintaan $P = -5Q + 125$ dan fungsi penawaran $P = 4Q + 20$. Jika produsen barang tersebut membagikan produknya secara gratis pada konsumen, berapa jumlah subsidi yang harus diberikan.

4. Permintaan dan penawaran barang "XYZ" ditunjukkan oleh fungsi $P = -8Q + 2.500$ dan $P = 4Q + 100$. Untuk mengurangi beban ekonomi masyarakat pemerintah memberikan subsidi terhadap barang tersebut sebesar 240/unit.

1. Berdasarkan soal diatas jumlah barang pada tingkat keseimbangan pasar sebelum subsidi adalah;

- a. $Q_e = 100$
- b. $Q_e = 200$
- c. $Q_e = 150$
- d. $Q_e = 250$

2. Sedangkan harga barang "XYZ" tersebut sebelum subsidi adalah sebesar;

- a. $P_e = 400$
- b. $P_e = 1.600$
- c. $P_e = 900$
- d. $P_e = 2.500$

3. Dengan diberikan subsidi, maka jumlah barang pada tingkat keseimbangan pasar adalah;

- a. $Q_s = 150$
- b. $Q_s = 220$
- c. $Q_s = 320$
- d. $Q_s = 350$

4. Sedangkan harga barang tersebut setelah diberikan subsidi;

- a. $P_s = 650$
- b. $P_s = 740$
- c. $P_s = 800$
- d. $P_s = 850$

5. Maka besar subsidi yang dinikmati konsumen adalah;

- a. $S_k = 160$
- b. $S_k = 200$
- c. $S_k = 180$
- d. $S_k = 240$

6. Besar subsidi yang dinikmati produsen barang tersebut adalah sebesar;

- a. $S_p = 80$
- c. $S_p = 60$

b. $S_p = 40$

d. $S_p = 0$

7. Total subsidi yang harus diberikan pemerintah;

a. $T_s = 33.000$

c. $T_s = 76.800$

b. $T_s = 52.800$

d. $T_s = 84.000$

2.6 Fungsi Konsumsi dan Tabungan

Konsumsi dapat diartikan sebagai hubungan persamaan anatara pengeluaran untuk konsumsi dengan pendapatan. Bentuk umum persamaan fungsi konsumsi adalah:

$$C = a + bY$$

Dimana; C; konsumsi

a; konsumsi otonom, yaitu besarnya konsumsi jika tidak ada pendapatan

b; kecenderungan konsumsi (MPC: Marginal Propensity to Consume) yang menunjukkan perubahan konsumsi akibat perubahan pendapatan. $MPC = \Delta C / \Delta Y$

Y; pendapatan

Tabungan dapat diartikan sebagai bagian dari pendapatan yang tidak dikonsumsi.

Secara matematika dapat dilihat,

$$Y = C + S$$

$$S = Y - C$$

$$S = Y - (a + bY)$$

$$S = Y - a - bY$$

$$S = -a + (1 - b)Y$$

Dimana; -a; tabungan otonom, besarnya tabungan jika tidak ada pendapatan.

$1 - b$; kecenderungan untuk menabung (MPS: Marginal Propensity to Saving) yang menunjukkan perubahan tabungan akibat perubahan pendapatan. $MPS = \Delta S / \Delta Y$

Untuk menggambar grafik fungsi konsumsi dan tabungan terlebih dahulu harus tentukan bahwa sumbu tegak menunjukkan sumbu C dan S (sumbu konsumsi dan tabungan), sedangkan sumbu datar menunjukkan sumbu Y (sumbu pendapatan). Langkah – langkah untuk menggambar grafik fungsi konsumsi dan fungsi tabungan yaitu sebagai berikut : a.

Grafik fungsi konsumsi dimulai dari titik a (konsumsi otonom) b. Grafik fungsi tabungan dimulai dari titik -a. c. Kemudian kedua titik tersebut ditarik garis lurus dan memotong titik BEP, baik titik BEP yang berada di atas maupun titik BEP yang berada di bawah.

Contoh

Hasil survey tahun 201? pada suatu wilayah, pendapatan buruh sebesar Rp 2.200.000,-/bulan dengan tingkat konsumsi sebesar Rp 2.000.000,-/bulan. Lima tahun berikutnya dilakukan survey diwilayah yang sama pendapatan buruh wilayah tersebut meningkat sebesar Rp 3.700.000,-/ bulan dan konsumsinya juga naik sebesar Rp 3.200.000,-/bulan. Dari data tersebut buatlah fungsi konsumsi dan tabungan, tingkat keseimbangan pendapatan, konsumsi dan tabungan jika pendapatan Rp 4.000.000/bulan.

$$Y_1 = 2.200.000 \quad Y_2 = 3.700.000 \quad \Delta Y = 1.500.000$$

$$C_1 = 2.000.000 \quad C_2 = 3.200.000 \quad \Delta C = 1.200.000$$

$$S_1 = 200.000 \quad S_2 = 500.000 \quad \Delta S = 300.000$$

$$b = MPC = 1.200.000/1.500.000 = 0,8$$

$$b = MPS = 300.000/1.500.000 = 0,2$$

$$Y - Y_1 = b(Q - Q_1) \quad \longrightarrow \quad C - C_1 = b(Y - Y_1)$$

$$C - 2.000.000 = 0,8(Y - 2.200.000)$$

$$C = 240.000 + 0,8 Y$$

$$Y - Y_1 = b(Q - Q_1) \quad \longrightarrow \quad S - S_1 = b(Y - Y_1)$$

$$S - 200.000 = 0,2(Y - 2.200.000)$$

$$S = -240.000 + 0,2 Y$$

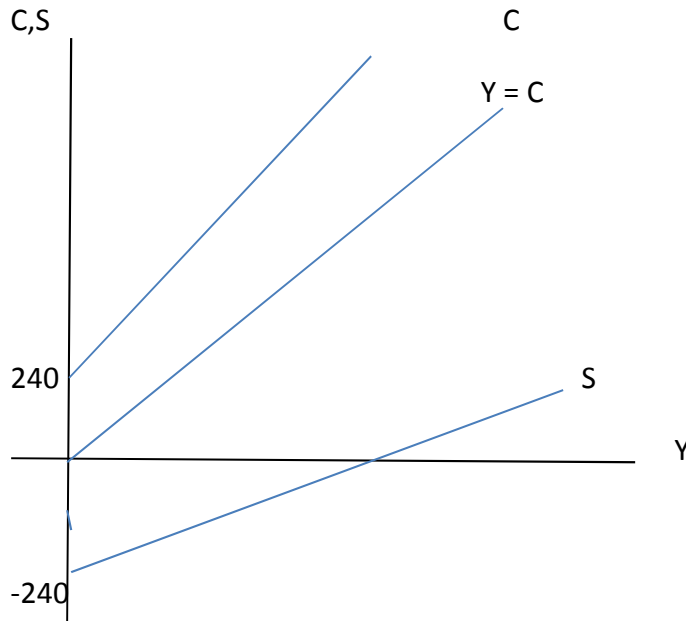
Keseimbangan pendapatan: $Y = C$

$$Y = 240.000 + 0,8 Y$$

$$0,2Y = 240.000 \quad \longrightarrow \quad Y = 1.200.000$$

$$Y = 4.000.000 \quad \longrightarrow \quad C = 240.000 + 0,8(4.000.000) = 3.440.000$$

$$S = 4.000.000 - 3.440.000 = 560.000$$



Latihan soal

1. Penghasilan sebesar Rp 2.500.000,-/bulan dengan konsumsi sebesar Rp 2.400.000,-/bulan. Setelah beberapa tahun bekerja penghasilannya naik menjadi Rp 4.000.000,-/bulan. Sedangkan tabungannya bertambah sebesar Rp 600.000,-/bulan dibandingkan dengan saat awal bekerja; tentukanlah fungsi konsumsi dan tabungan, jika pendapatan 4.500.000 berapa konsumsi dan tabungan, serta berapa tingkat keseimbangan pendapatan.

2. Seorang alumni biaya hidupnya per bulan sebesar Rp 2.500.000,- dengan pendapatan sebesar Rp 3.500.000,-. Setelah beberapa lama bekerja pendapatannya naik menjadi Rp 6.000.000,-/bulan dan sanggup menabung sebesar Rp 2.000.000,- per bulan. Buat fungsi konsumsi dan tabungan serta tingkat keseimbangan pendapatan.

3. Seorang pengangguran biaya hidupnya per bulan sebesar Rp 1.500.000,- Setelah beberapa lama menganggur dia mendapatkan pekerjaan dengan pendapatan sebesar Rp 2.500.000,- dengan konsumsi sebesar Rp 2.000.000,- per bulan.

1. Fungsi konsumsi dari pernyataan diatas adalah;

- a. $C = 0,8 Y + 1.500.000$
- b. $C = 0,8 Y - 1.500.000$
- c. $C = 0,2 Y + 1.500.000$
- d. $C = 0,2 Y - 1.500.000$

2. Fungsi tabungannya adalah;

a. $S = 0,8 Y + 1.500.000$

b. $S = 0,8 Y - 1.500.000$

c. $S = 0,2 Y + 1.500.000$

d. $S = 0.2 Y - 1.500.000$

3. Jika pendapatannya setelah beberapa tahun naik menjadi Rp 3.500.000,-/bulan, maka konsumsinya adalah sebesar;

a. $C = 2.200.000$

b. $C = 2.500.000$

c. $C = 2.700.000$

d. $C = 2.750.000$

4. Sedangkan tabungannya adalah sebesar;

a. $S = 1.300.000$

b. $S = 1000.000$

c. $S = 800.000$

d. $S = 750.000$

5. Tingkat keseimbangan pendapatan dari hal tersebut diatas adalah;

a. $Y = 2.500.000$

b. $Y = 2.250.000$

c. $Y = 1.875.000$

d. $Y = 1.750.000$

2.7. Fungsi Biaya Total (Total Cost)

Terdiri dari 2 komponen yaitu:

Biaya tetap (*Fixed Cost*), adalah biaya yang dikeluarkan tidak tergantung besar atau kecilnya produk yang dihasilkan, jika biaya tetap disimbulkan dengan a, maka

$$FC = a$$

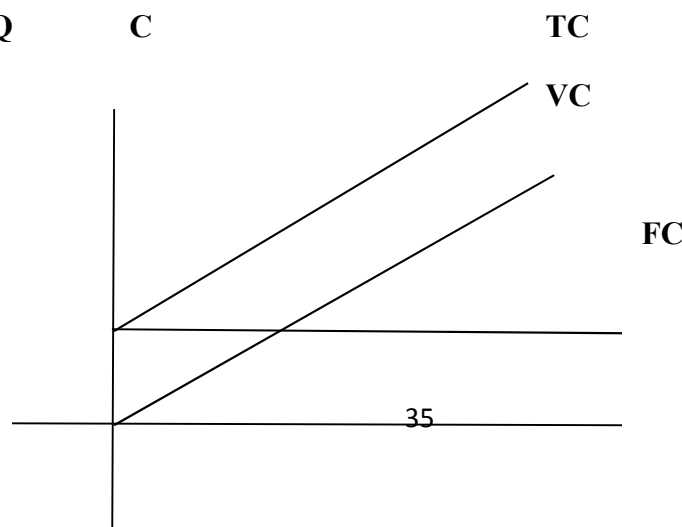
Biaya Variabel (*Variabel Cost*), adalah kenaikan biaya untuk setiap kenaikan jumlah barang yang dihasilkan, jika biaya variabel disimbulkan dengan bQ, maka

$$VC = bQ$$

Total Biaya, menunjukkan total biaya untuk memproduksi barang yang merupakan jumlah biaya tetap dan biaya variabel. Sehingga formulasi matematika dinyatakan;

$$TC = FC + VC$$

$$TC = a + bQ$$



Contoh

Biaya tetap yang harus dikeluarkan untuk memproduksi suatu barang sebesar 25.000, biaya produksi naik untuk setiap produksinya sebesar 50, buat fungsi total biaya, biaya yang dikeluarkan jika produksi sebanyak 10 unit dan total variabel cost

$$FC = 25.000 \quad VC = 50 Q$$

$$TC = 25.000 + 50Q$$

$$Q = 10 \quad \longrightarrow \quad TC = 25.000 + 50 (10) = 25.500$$

$$TVC = 50 (10) = 500$$

Latihan soal

1. Biaya tetap untuk memproduksi barang 30.000, untuk memproduksi barang tersebut biaya bertambah untuk setiap unit yang diproduksi sebesar 100. Buatlah fungsi biaya, fungsi biaya rata-rata, jika diproduksi 50 unit berapa total biaya.
2. Fungsi biaya rata-rata perusahaan untuk memproduksi suatu barang $AC = 25 + 1.000/Q$, Buatlah fungsi biaya perusahaan, jika biaya yang tersedia sebanyak 10.000, berapa unit yang bisa diproduksi.

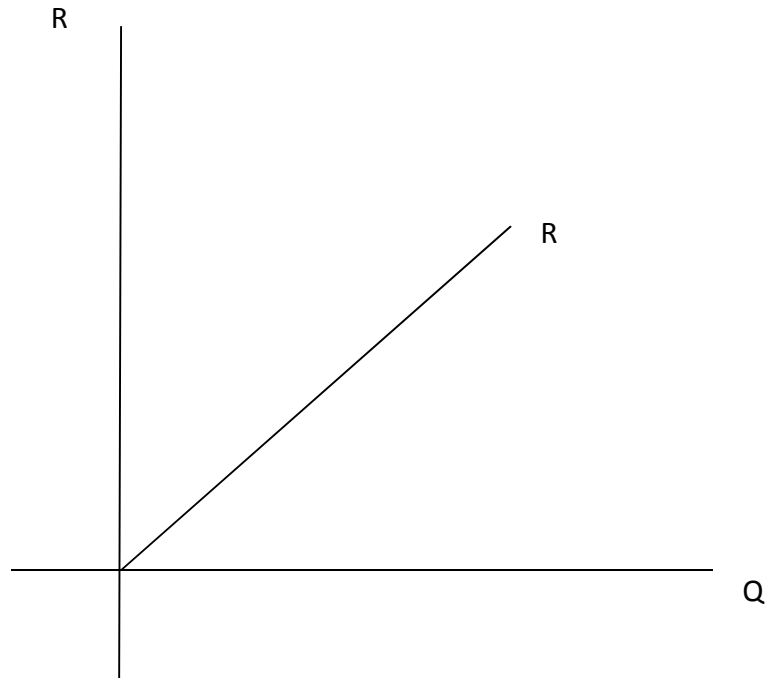
2.8 Fungsi Penerimaan (Revenue)

Fungsi penerimaan adalah hasil perkalian harga jual dengan jumlah barang yang terjual.

$$R = P.Q \quad \longrightarrow \quad R = f(Q)$$

$$\text{Penerimaan Rata-rata, } AR = f(Q)/Q$$

Fungsi penerimaan merupakan fungsi liner tanpa konstanta a, sehingga grafik fungsi penerimaan merupakan fungsi garis lurus yang dimulai dari perpotongan sumbu Q dan sumbu P dengan kemiringan positif.



Contoh

Harga jual barang 25/ unit, tentukan fungsi penerimaan, berapa penerimaan jika terjual 15 unit dan jika penerimaan 600 berapa unit yang terjual

$$R = P \cdot Q = 25Q$$

$$Q = 15, R = 25 \cdot 15 = 375$$

$$R = 600, 600 = 25 Q \quad \longrightarrow \quad Q = 24 \text{ unit}$$

Latihan soal:

1. Harga jual barang 250/unit, buatlah fungsi penerimaan, fungsi penerimaan rata-rata dan berapa penerimaan jika terjual 15 unit.
2. Fungsi penerimaan rata-rata $AR = 75$, berapa unit yang terjual jika penerimaannya 15.000.

2.9 Fungsi Laba (Profit) dan Pulang Pokok (Break Even Point/BEP)

Labanya (π), dapat dihitung dari penerimaan yang diperoleh dan biaya total yang dikeluarkan bisa dianalisa apakah usaha mendapat laba atau rugi

$$\pi = R - C$$

Laba diperoleh jika $\pi > 0$ atau $R > C$ dan

rugi jika $\pi < 0$ atau $R < C$

BEP, dimana kondisi usaha tidak mengalami keuntungan atau kerugian,

$$\pi = R - C$$

$$\text{BEP}; \pi = 0 \quad \longrightarrow \quad 0 = R - C$$

$$R = C$$

Contoh Fungsi biaya total $C = 2.000 + 50 Q$, Harga jual barang 75/unit. Buat fungsi laba, jika terjual 100 hitung laba dan unit yang diproduksi agar tercapai BEP.

$$C = 2.000 + 50 Q \quad R = 75 Q$$

$$\pi = 75 Q - (2000 + 50 Q)$$

$$\pi = 25 Q - 2.000$$

$$Q = 100, \quad \longrightarrow \quad \pi = 25(100) - 2.000 = 500$$

$$\text{BEP}; 0 = 25Q - 2.000 \quad \longrightarrow \quad Q = 80 \text{ unit}$$

Latihan soal

1. Harga jual barang A = Rp 300,-/unit. Untuk memproduksi barang tersebut perusahaan harus menyediakan biaya sebesar Rp 50.000,-. Biaya akan bertambah untuk setiap unit yang diproduksi sebesar Rp 200,-

- Berapa unit yang harus diproduksi agar mencapai titik impas
- Berapa laba yang diperoleh jika terjual sebanyak 750 unit.

2. Untuk memproduksi suatu produk perusahaan tunduk pada fungsi biaya $C = 3.000 + 10Q$. Bila harga jual 25/unit, hitung:

a. Fungsi laba perusahaan

b. Berapa unit yang harus diproduksi agar mencapai titik impas

c. Berapa laba yang diperoleh jika terjual sebanyak 750 unit.

3. PT. Agung Sentosa Makmur produsen sandal kulit, untuk membuat suatu model perusahaan harus menyediakan biaya sebesar Rp 40.000.000,-. Biaya perusahaan bertambah untuk setiap unit yang diproduksi sebesar Rp 125.000,-. Jika harga jual produknya Rp 150.000,-/unit, maka:

1. Fungsi biaya perusahaan untuk memproduksi model tersebut adalah:

a. $C = 40.150.000 Q$

c. $C = 275.000 Q - 40.000.000$

b. $C = 125.000 Q + 40.000.000$

d. $C = 150.000 Q + 40.000.000$

2. Fungsi Penerimaan (revenue) perusahaan adalah:

a. $R = 125.000 Q$

c. $R = 150.000 Q$

b. $R = 275.000 Q$

d. $R = 25.000 Q$

3. Fungsi laba perusahaan :

a. $\pi = 275.000 Q + 40.000.000$

c. $\pi = 25.000 Q + 40.000.000$

b. $\pi = 275.000 Q - 40.000.000$

d. $\pi = 25.000 Q - 40.000.000$

4. Titik Impas perusahaan untuk memproduksi sandal tersebut adalah:

a. $Q = 145$ unit

c. $Q = 1.600$ unit

b. $Q = 1.280$ unit

d. $Q = 2.100$ unit

5. Jika perusahaan memproduksi sebanyak 5.000 unit, maka laba yang diperoleh:

a. $\pi = 13.790.000$

c. $\pi = 65.000.000$

b. $\pi = 42.000.000$

d. $\pi = 85.000.000$

6. Laba yang diinginkan perusahaan Rp 50.000.000,-, maka jumlah yang harus diproduksi:

a. $Q = 350$ unit

c. $Q = 360$ unit

b. $Q = 1.800$ unit

d. $Q = 4.200$ unit

BAB III FUNGSI KUADRAT

Fungsi kuadrat adalah suatu fungsi yang variabel bebasnya maksimal berpangkat dua.

Bentuk umum fungsi kuadrat

$$Y = aX^2 + bX + c$$

Y = variabel dependen

X = variabel independen

a,b,c = konstanta dan a ≠ 0

3.1. Menghitung akar persamaan

Pencarian akar-akar persamaan dapat ditentukan dengan menggunakan rumus abc

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad D = b^2 - 4ac$$

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Contoh

Tentukanlah nilai $X_{1,2}$ dari persamaan $Y = -X^2 + 2X + 3$

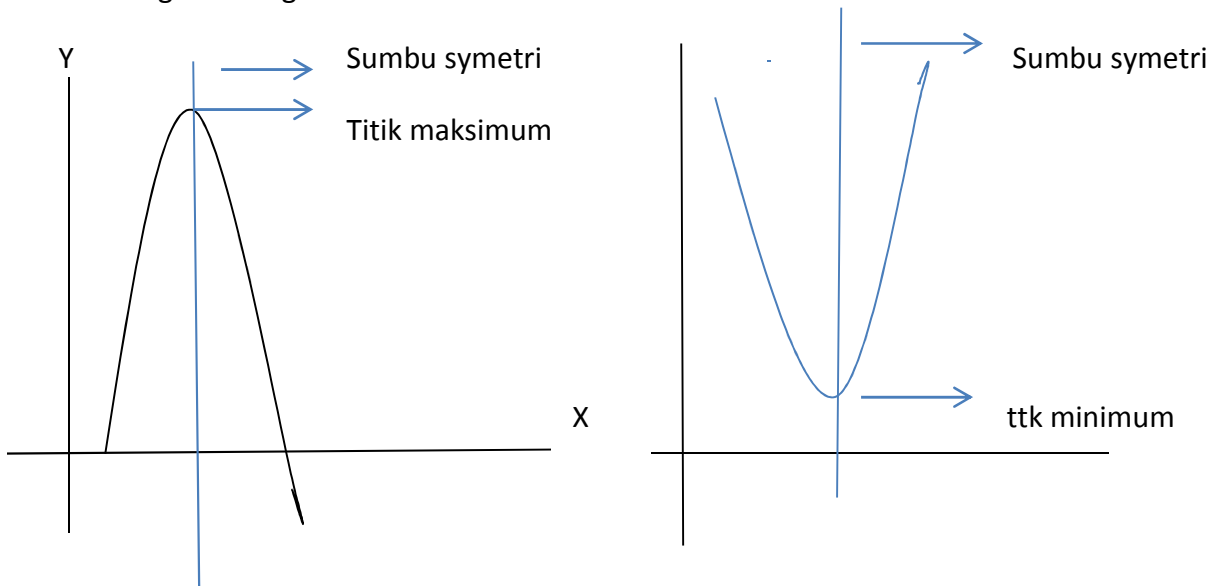
$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad D = b^2 - 4ac$$

$$X_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3}}{2 \cdot (-1)}$$

$$X_1 = \frac{-2+4}{-2} = -1$$

$$X_2 = \frac{-2-4}{-2} = 3$$

Bentuk grafik fungsi kuadrat



$a < 0$, kurva terbuka kebawah

$a > 0$, kurva terbuka keatas

Sumbu symetri, merupakan garis sejajar sumbu Y melalui titik maksimum/minimum dan membagi kurva atas 2 bagian yang sama (garis cermin)

3.2. Koordinat titik maksimum/minimum, (x,y)

$$Y = aX^2 + bX + c$$

$$X = \frac{-b}{2a}$$

$$Y = \frac{b^2 - 4ac}{-4a}$$

Tentukan titik maksimum atau minimum fungsi

1. $Y = -2X^2 + 16X + 3$

$a < 0$, titik maksimum, kurva terbuka kebawah

$$X = \frac{-16}{2 \cdot -2} = 4$$

$$Y = \frac{16^2 - 4 \cdot -2 \cdot 3}{-4 \cdot -2} = 35, \text{ koordinat titik maksimum } (4,35)$$

$$2 \quad Y = X^2 - 10X + 50$$

$a > 0$, titik *minimum*, kurva terbuka keatas

$$X = \frac{-(-10)}{2 \cdot 1} = 5$$

$$Y = \frac{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 50}{-4 \cdot 1} = 25, \text{ koordinat titik minimum } (5, 25)$$

3.3. Kurva fungsi kuadrat

1. Tentukan koordinat titik maksimum/minimum.
2. Tentukan titik potong fungsi dengan sumbu Y
3. Dengan menggunakan sumbu symetri (cermin) hitung kordinat titik bayangan (ad.2)

Contoh

Buat kurva $Y = -3X^2 + 24X - 28$

$A < 0$, titik maksimum, kurva terbuka kebawah

$$X = \frac{-24}{2 \cdot -3} = 4 \quad Y = \frac{24^2 - 4 \cdot -3 \cdot -28}{-4 \cdot -3} = 20$$

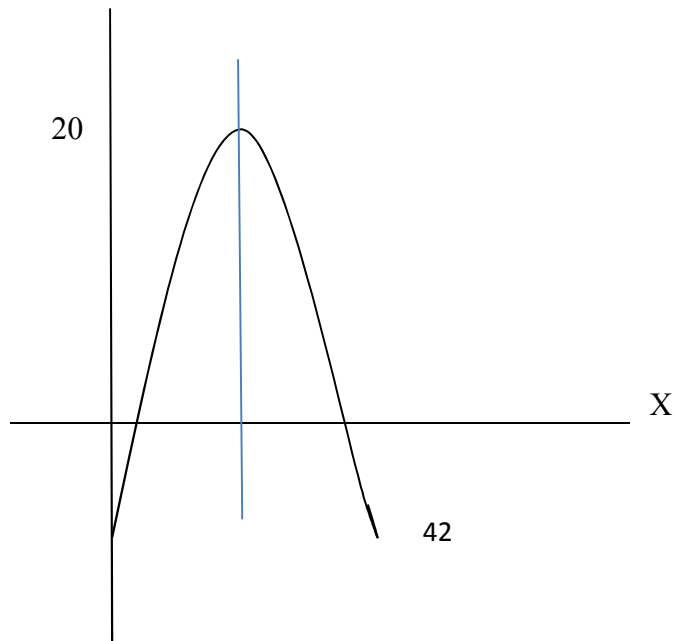
1. Koordinat titik maksimum (4,20)
2. Perpotongan persamaan dengan sumbu Y , maka

$$X = 0$$

$$Y = -3 \cdot 0^2 + 24 \cdot 0 - 28 = -28, \text{ koordinat titik potong dengan sumbu Y } (0, -28)$$

3. Koordinat titik bayangan (0, -28) adalah (8, -28)

Y



BAB IV APLIKASI FUNGSI KUADRAT

4.1. Fungsi Permintaan, Penawaran dan Keseimbangan Pasar

Contoh

Tentukan harga dan jumlah pada tingkat kesimbangan pasar dda ri fungsi permintaan dan penawaran $P = 55 - Q^2$ dan $P = 5 + Q^2$

Keseimbangan pasar E; $P_d = P_s$

$$55 - Q^2 = 5 + Q^2$$

$$50 = 2Q^2$$

$$Q_1 = 5 \rightarrow Q_e = 5, P_e = 5 + 5^2 = 30$$

$$Q_2 = -5$$

4.2. Keseimbangan pasar, efek pajak dan subsidi terhadap keseimbangan pasar

Contoh

Permintaan konsumen terhadap barang A, $P = -Q^2 + 15Q - 2$, sedangkan penawarannya ditunjukkan oleh fungsi $P = Q^2 - 10Q + 7$, jika dibebankan pajak sebesar 10/unit hitung a. pajak yang ditanggung konsumen, produsen dan total pajak.

b. Jika diberib subsidi 15/unit hitung subsidi yang dinikmati konsumen, produsen dan total subsidi

Sebelum pajak/ subsidi E; $P_d = P_s$

$$-Q^2 + 15Q - 2 = Q^2 - 10Q + 7$$

$$0 = 2Q^2 - 25Q + 9$$

$$Q_{1,2} = \frac{25 \pm \sqrt{25^2 - 4 \cdot 2 \cdot 9}}{2 \cdot 2}$$

$$Q_1 = 12,1 \rightarrow Q_e = 12,1 \quad P_e = 32,4$$

$$Q_2 = 0,2$$

Setelah pajak; $P_d = -Q^2 + 15Q - 2$

$$P_t = Q^2 - 10Q + 7 + 10$$

$$P_t = Q^2 - 10Q + 17$$

$$E_t; -Q^2 + 15Q - 2 = Q^2 - 10Q + 17$$

$$0 = 2Q^2 - 25Q + 19$$

$$Q_{1,2} = \frac{25 \pm \sqrt{25^2 - 4 \cdot 2 \cdot 19}}{2 \cdot 2}$$

$$Q_1 = 11,7 \rightarrow Q_t = 11,7 \quad P_t = 36,9$$

$$Q_2 = 0,1$$

$$T_k = 36,9 - 32,4 = 7,5$$

$$T_p = 10 - 7,5 = 2,5$$

$$T_t = 10(11,7) = 117$$

Setelah subsidi; $P_d = -Q^2 + 15Q - 2$

$$P_s = Q^2 - 10Q + 7 - 15$$

$$P_s = Q^2 - 10Q - 8$$

$$E_t; -Q^2 + 15Q - 2 = Q^2 - 10Q - 8$$

$$0 = 2Q^2 - 25Q - 6$$

$$Q_{1,2} = \frac{25 \pm \sqrt{25^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2}$$

$$Q_1 = 12,7 \rightarrow Q_s = 12,7 \quad P_s = 26,3$$

$$Q_2 = -0,1$$

$$S_k = 32,4 - 26,3 = 6,1$$

$$S_p = 15 - 6,1 = 8,9$$

$$T_s = 15(12,7) = 190,5$$

4.3 Fungsi penerimaan, Total Biaya dan Laba

Fungsi permintaan merupakan fungsi linier dan kemiringan negative seperti formula $P = a - bQ$

Maka fungsi penerimaan dinyatakan dengan $R = P \cdot Q = (a - bQ)Q = aQ - bQ^2$

Fungsi biaya total dalam fungsi kuadrat $C = aQ^2 + bQ + c$, dimana $aQ^2 + bQ$ adalah biaya variabel sedangkan c adalah biaya tetap

Contoh

Permintaan barang A ditunjukkan oleh fungsi $P = -2Q + 80$, Sedangkan fungsi biaya untuk memproduksi $C = 3Q^2 - 40Q + 10$. Dari pernyataan tersebut buat dan hitunglah Fungsi penerimaan, fungsi laba, unit yang terjual jika laba maksimum dan laba maksimum.

$$\text{Fungsi penerimaan } R = P \cdot Q = (-2Q + 80) Q = -2Q^2 + 80Q$$

$$C = 3Q^2 - 40Q + 10$$

$$\text{Fungsi laba } \pi = R - C = (-2Q^2 + 80Q) - (3Q^2 - 40Q + 10) = -5Q^2 + 120Q - 10$$

$$\text{Unit yang terjual jika laba maksimum } Q = \frac{-120}{2 \cdot -5} = 12$$

$$\text{Laba maksimum, } \pi = \frac{120^2 - 4 \cdot -5 \cdot -10}{-4 \cdot -5} = 710$$

Latihan soal

1. Permintaan konsumen terhadap suatu barang $Q = -0,25P + 30$. Untuk memproduksi biaya tetap yang dibutuhkan 25 dengan biaya variabel $VC = Q^2 - 60Q$. Buatlah fungsi penerimaan, fungsi laba, unit yang terjual saat laba maksimum dan laba maksimum.

2. Harga jual barang 75/ unit dengan total biaya $C = Q^2 - 25Q + 15$. Buatlah fungsi penerimaan, fungsi laba, unit yang terjual jika laba maksimum dan laba maksimum.

3. PT. Agung perkasa produsen suatu barang. Fungsi permintaan barang tersebut adalah $P = -12Q + 280$, sedangkan biaya ditunjukkan oleh fungsi $C = 8Q^2 - 120Q + 50$, saudara diminta untuk menghitung;

1. Fungsi laba perusahaan adalah;

a. $\pi = -20Q^2 + 400Q - 50$

b. $\pi = -4Q^2 + 160Q + 50$

c. $\pi = -8Q^2 + 160Q - 50$

d. $\pi = -8Q^2 + 400Q + 50$

2. Jumlah/unit yang diproduksi /dijual agar laba perusahaan maksimum;

a. $Q = 25$ Unit

b. $Q = 20$ unit

c. $Q = 15$ unit

d. $Q = 10$ unit

3. Laba maksimum perusahaan adalah sebesar;

a. π maksimum = 1.550

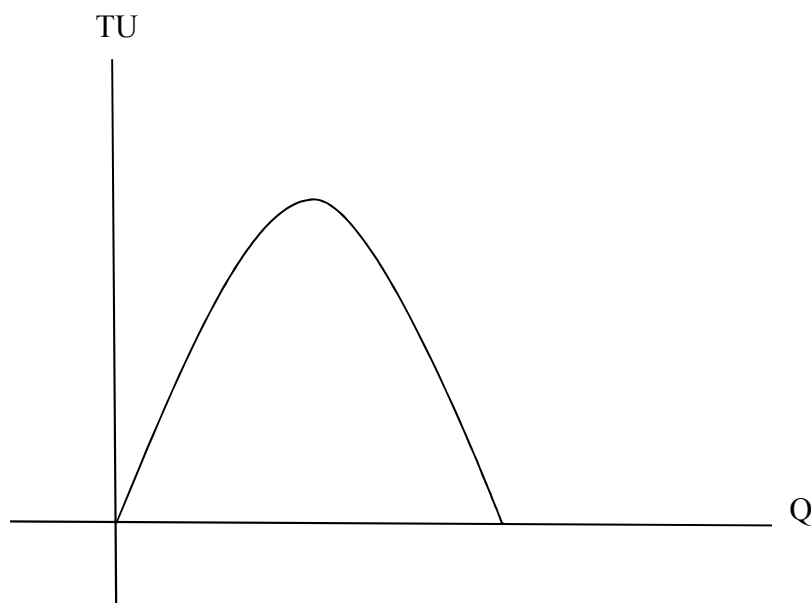
b. π maksimum = 1.950

c. π maksimum = 3.750

d. π maksimum = 4.450

4.4 Fungsi Kepuasan Total

Dalam mengkonsumsi satu jenis barang berlaku hukum yang disebut hukum pertambahan kepuasan yang semakin berkurang yaitu kegiatan mengkonsumsi suatu barang secara terus menerus akan memberikan tambahan utilitas yang semakin menurun sehingga fungsi utilitas untuk satu jenis barang mengikuti fungsi kuadrat dengan nilai $a < 0$.



Contoh

Pola konsumsi konsumen terhadap satu jenis barang $TU = - 2,5Q^2 + 50 Q$. Hitung jumlah unit yang digunakan dan total utilitas maksimum

$$Q = \frac{-50}{2 \cdot -2,5} = 10$$

$$TU \text{ maksimum} = \frac{50^2 - 4 \cdot -2,5 \cdot 0}{-4 \cdot -2,5} = 250$$

Latihan soal

1. Fungsi utilitas suatu barang $TU = - 3Q^2 + 60Q$. Hitung unit yang digunakan dan maksimum utilitas serta total utilitas jika barang yang digunakan sebanyak 5 unit.

BAB V DIFERENSIAL SEDERHANA

5.1. Pengertian :

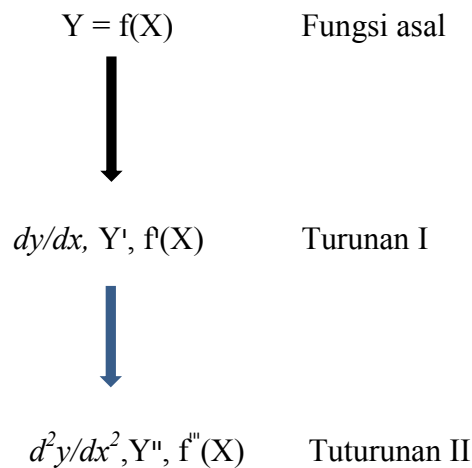
Diferensial dapat diartikan sebagai tingkat perubahan suatu fungsi atas adanya perubahan variabel bebas dari fungsi tersebut.

:Maka diferensial dapat diartikan sebagai tingkat perubahan dari setiap variabel y sebagai tanggapan terhadap suatu perubahan dalam variabel x .

Dalam kasus ekonomi dapat dicontohkan sebagai berikut:

- Misalkan pada fungsi permintaan, hubungan antara jumlah barang yang diminta dengan tingkat harga. Adanya perubahan tingkat harga pada suatu titik tertentu akan mempengaruhi jumlah barang yang diminta. Pada setiap kasus dan setiap titik bisa sama ataupun berbeda, bergantung terhadap jenis fungsi permintaannya itu sendiri.
- Contoh (klasik) lainnya dari suatu fungsi utility (kegunaan) atas segelas air.

Diferensial (turunan) fungsi dapat dinotasikan sebagai berikut:



Secara matematis, untuk mencari persamaan dari suatu turunan fungsi dilakukan dengan pendekatan limit fungsi, tetapi dalam pembahasan ini, kita langsung menggunakan rumus dan aturan dalam turunan guna memudahkan penyelesaian fungsi turunan.

5.2.Kaidah-kaidah diferensial

- 1) Turunan dari fungsi konstan/konstanta

$$Y = k$$

dengan $k =$ konstanta, maka $dy/dx = 0$

Contoh : $Y = 12$ maka $dy/dx = 0$

$$Y = -32 \text{ maka } dy/dx = 0$$

- 2) Turunan fungsi x berpangkat n

$$Y = X^n$$

dengan $n =$ sembarang bilangan, maka $dy/dx = X^{n-1}$

Contoh: $Y = X^3$ maka $dy/dx = 3 X^2$

$$Y = X^4 \text{ maka } dy/dx = 4 X^3$$

- 3) Turunan perkalian fungsi dengan koefisien c ,

$$Y = cX^n$$

maka $dy/dx = cn X^{n-1}$

Contoh : $Y = 3 X^4$ maka $dy/dx = 3 \cdot 4 X^3 = 12 X^3$

$$Y = -5 X^3 \text{ maka } dy/dx = - 5 \cdot 3 X^2$$

- 4) Aturan penjumlahan dan pengurangan beberapa fungsi dalam turunan,

$$Y = U \pm V \pm W \quad \text{dimana } U = f(X); V = f(X); W = f(X)$$

maka $dy/dx = du/dx \pm dv/dx \pm dw/dx$

Contoh: $Y = 2 X^3 - 4 X^2 + 5 X - 6$ maka $dy/dx = 6 X^2 - 8 X + 5$

$$Y = - 10 X^3 + 15 X^2 + 25 \text{ maka } dy/dx = -30 X^2 + 30 X$$

- 5) Aturan perkalian 2 fungsi dalam turunan

$$Y = U \cdot V \quad \text{dimana } U = f(X) \text{ dan } V = f(X)$$

Maka $dy/dx = du/dx.V + dv/dx.U$

Contoh: $Y = (X^2 - 4)(2X^3 + 1)$

Contoh: $Y = (X^3 - 4)(4X^2 + 5)$ $du/dx = 3X^2$ $dv/dx = 8$

$Y = U \cdot V$

maka $dy/dx = 3X^2(4X^2 + 5) + 8X(X^3 - 4)$

$$dy/dx = 20X^4 + 15X^2 - 32X$$

$Y = (2X^4 - X^2)(X^3 + X)$ $du/dx = 8X^3 - 2X$ $dv/dx = 3X^2 + 1$

maka $dy/dx = (8X^3 - 2X)(X^3 + X) + (3X^2 + 1)(2X^4 - X^2)$

$$dy/dx = (8X^6 + 8X^4 - 2X^4 - 2X^2) + (6X^6 - 3X^4 + 2X^4 - X^2)$$

$$dy/dx = 14X^6 + 5X^4 - 3X^2$$

6) Aturan pembagian 2 fungsi dalam turunan

$Y = U/V$ dimana $U = f(X)$ dan $V = f(X)$

maka $dy/dx = \frac{du/dx.V - dv/dx.U}{V^2}$

Contoh ; $Y = (2X^3 + X^2) / (X^2 + 3)$ $du/dx = (6X^2 + 2X)$ $dv/dx = 2X$

maka $dy/dx = \frac{(6X^2 + 2X)(X^2 + 3) - (2X^3 + X^2)(2X)}{(X^2 + 3)^2}$

$$\begin{aligned} &= \frac{2X^4 + 18X^2 + 6X}{X^4 + 6X^2 + 9} \end{aligned}$$

7) Aturan rantai dalam turunan,

$$Y = U^n \quad \text{dimana } U = f(X)$$

$$\text{Maka } dy/dx = n du/dx \cdot U^{n-1}$$

$$\text{Contoh: } Y = (X^3 + X)^3$$

$$\text{Maka } dy/dx = 3(3X^2 + 1)(X^3 + X)^2$$

$$dy/dx = 18X^8 + 21X^6 + 15X^4 + 3X^2$$

5.3. Turunan dari turunan

Suatu fungsi tergantung dari pangkatnya dapat diturunkan beberapa kali. Semua aturan diferensial diatas juga berlaku pada turunan dari turunan.

$$Y = f(X) \quad \text{Fungsi asal}$$



$$dy/dx, Y', f'(X) \quad \text{Turunan I}$$



$$d^2y/dx^2, Y'', f''(X) \quad \text{Turunan II}$$

$$\text{Contoh: 1) } Y = 3X^3 - x^2 + 5X - 2$$

$$dy/dx = 6X^2 - 2X + 5$$

$$d^2y/dx^2 = 12X - 2$$

$$2) Y = 4X^4 + 3X^3 - X^2 + 7X$$

$$dy/dx = 16X^3 + 9X^2 - 2X + 7$$

$$d^2y/dx^2 = 48X^2 + 18X - 2$$

$$3) Y = (2X^4 - X^2)(X^3 + X) \quad du/dx = 8X^3 - 2X \quad dv/dx = 3X^2 + 1$$

$$\text{maka } dy/dx = (8X^3 - 2X)(X^3 + X) + (3X^2 + 1)(2X^4 - X^2)$$

$$dy/dx = (8X^6 + 8X^4 - 2X^4 - 2X^2) + (6X^6 - 3X^4 + 2X^4 - X^2)$$

$$dy/dx = 14X^6 + 5X^4 - 3X^2$$

$$Y = (2X^4 - X^2)(X^3 + X) \quad du/dx = 8X^3 - 2X \quad dv/dx = 3X^2 + 1$$

$$\text{maka } dy/dx = (8X^3 - 2X)(X^3 + X) + (3X^2 + 1)(2X^4 - X^2)$$

$$dy/dx = (8X^6 + 8X^4 - 2X^4 - 2X^2) + (6X^6 - 3X^4 + 2X^4 - X^2)$$

$$dy/dx = 14X^6 + 5X^4 - 3X^2$$

$$d^2y/dx^2 = 84X^5 + 20X^3 - 6X$$

5.4. Nilai ekstrim fungsi parabola (Maksimum/Minimum)

$$Y = aX^2 + bX + c$$

Langkah-langkah:

1. Trunkan fungsi (turunan I)
2. Fungsi ekstrim saat turunan I = 0, sehingga diperoleh nilai X
3. Turunkan fungsi (turunan II), jika $d^2y/dx^2 > 0$, fungsi mempunyai nilai minimum dan $d^2y/dx^2 < 0$, fungsi mempunyai nilai maksimum
4. Nilai maksimum/minimum fungsi dihitung dengan mensubstitusikan hasil ad.2 kedalam fungsi

Awal

Contoh: Tentukan nilai ekstrim dari fungsi

$$Y = 2X^2 - 20X + 75 \quad \text{langkah-langkah:}$$

1. $dy/dx = 4X - 20$
2. $4X - 20 = 0$ maka $X = 5$
3. $d^2y/dx^2 = 4$ $4 > 0$ fungsi mempunyai nilai minimum
4. Nilai minimum fungsi pada $X = 5$ dan

$$Y = 2(5)^2 - 20(5) + 75 = 25$$

$$Y = -3X^2 + 18X + 3 \quad \text{langkah-langkah}$$

1. $dy/dx = -6X + 18$
2. $-6X + 18 = 0$ maka $X = 3$
3. $d^2y/dx^2 = -6$ $-6 < 0$ fungsi mempunyai nilai maksimum
4. Nilai maksimum fungsi pada $X = 3$ dan

$$Y = -3(3)^2 + 18(3) + 3 = 30$$

BAB VI APLIKASI DIFERENSIAL

6.1.Elastisitas, elastisitas dari fungsi $y = f(x)$ berkenaan dengan perubahan nilai x mengikuti formula;

$$\eta = dy/dx \cdot \frac{x}{y}$$

6.1.1.Elastisitas permintaan, adalah suatu koefisien yang menunjukkan besarnya perubahan jumlah barang yang diminta akibat adanya perubahan harga barang tersebut.

$$D; Q = f(P) \quad \longrightarrow \quad \eta_d = dQ/dP \cdot \frac{Q}{P}$$

$$D; P = f(Q) \quad \longrightarrow \quad \eta_d = \frac{1}{dP/dQ} \frac{Q}{P}$$

Contoh

Fungsi permintaan suatu barang $Q = -0,25P + 60$. Tentukan elastisitas permintaan pada tingkat harga 10.

$$P = 20; Q = -0,25 \cdot 20 + 60 = 55$$

$$\eta_d = dQ/dP \cdot \frac{Q}{P} = -0,25 \cdot 55/20 = -0,6875$$

Fungsi permintaan suatu barang $P = -4Q + 240$. Tentukan elastisitas permintaan pada tingkat harga 10.

$$P = 20; Q = -0,25 \cdot 20 + 60 = 55$$

$$\eta_d = \frac{1}{-4} \frac{55}{20} = 0,6875$$

6.1.2.Elastisitas Penawaran, adalah suatu koefisien yang menunjukkan besarnya perubahan jumlah barang yang ditawarkan akibat adanya perubahan harga barang tersebut.

$$S; Q = f(P) \quad \longrightarrow \quad \eta_s = dQ/dP \cdot \frac{Q}{P}$$

$$S; P = f(Q) \quad \longrightarrow \quad \eta_s = \frac{1}{dP/dQ} \frac{Q}{P}$$

Contoh

Penawaran suatu barang mengikuti fungsi $Q = 5 + 0,2 P^2$, tentukan elastisitas penawaran pada tingkat harga $P = 5$.

$$P = 5 \longrightarrow Q = 5 + 0,2 \cdot 5^2 = 10$$

$$\eta_s = dQ/dP \cdot \frac{Q}{P} = 4 P \cdot 10/5$$

$$\eta_s = 4 \cdot 5 \cdot 10/5 = 100$$

6.2. Biaya Marginal, adalah biaya tambahan yang dikeluarkan untuk menghasilkan satu unit tambahan produk. Fungsi biaya marjinal (Marginal Cost = MC) merupakan turunan pertama dari fungsi biaya.

$$C = f(Q)$$

$$\text{Biaya rata-rata } AC = C/Q$$

$$MC = \frac{dC}{dQ}$$

Contoh;

Biaya total untuk memproduksi barang $C = 3Q^2 - 30Q + 125$, hitung produksi minimum dan biaya minimum dari fungsi biaya tersebut.

$$MC = 6Q - 30$$

$$MC' = 6 > 0, C \text{ minimum}$$

$$C_{\text{minimum}} \text{ jika } MC = 0, 6Q - 30 = 0 \longrightarrow Q = 5$$

$$C_{\text{minimum}} = 3 \cdot 5^2 - 30 \cdot 5 + 125 = 50$$

Latihan soal

1. Fungsi biaya $C = 2,5Q^2 - 50Q + 600$, tentukan fungsi biaya rata-rata, fungsi marginal biaya, produksi minimum dan biaya minimum.

2. Fungsi biaya rata-rata $AC = 5Q - 40 + 1000$. Tentukan fungsi marjinal biaya, produksi minimum dan biaya minimum.

6.3. Penerimaan Marjinal, (Marginal Revenue = MR) adalah penerimaan tambahan yang diterima berkenaan bertambahnya satu unit keluaran yang diproduksi.

$$R = f(Q)$$

$$\text{Penerimaan Rata-rata, } AR = R/Q$$

$$MR = \frac{dR}{dQ}$$

Contoh

1. Fungsi penerimaan perusahaan $R = -Q^2 + 50Q$, tentukan fungsi penerimaan rata-rata, marginal penerimaan, unit yang terjual agar penerimaan maksimum dan penerimaan maksimum tersebut.

2. Fungsi penerimaan rata-rata $AR = -4Q + 56$, tentukan fungsi marjinal penerimaan, unit yang terjual agar penerimaan maksimum dan penerimaan maksimum.

6.4. Laba maksimum

Contoh

Permintaan suatu barang $P = -3Q + 90$. Biaya total untuk memproduksinya $C = 2Q^2 + 30Q + 10$. Tentukan fungsi laba, unit yang terjual agar laba maksimum dan laba maksimum.

$$R = P \cdot Q = (-3Q + 90)Q = -3Q^2 + 90Q$$

$$\pi = R - C = (-3Q^2 + 90Q) - (2Q^2 + 30Q + 10) = -5Q^2 + 120Q - 10$$

$$\pi' = -10Q + 120$$

$$\pi'' = -10 < 0, \pi \text{ maksimum}$$

$$\pi' = -10Q + 120 = 0, \quad Q = 12$$

$$\pi \text{ maksimum} = -5 \cdot 12^2 + 120 \cdot 12 - 10 = 710$$

Latihan soal

1. Harga jual barang mengikuti fungsi $P = -Q + 80$, sedangkan fungsi biaya rata-rata $AC = Q - 60 + 25/Q$. Tentukan fungsi laba, unit yang terjual jika laba maksimum dan laba maksimum.

2. Fungsi permintaan $Q = -0,5P + 70$ sedangkan fungsi biaya rata-rata $AC = 3Q - 60 + 10/Q$. Tentukan fungsi laba dan laba maksimum.

3. PT. Jagung perkasa produsen suatu barang . Fungsi permintaan barang tersebut adalah $P = -15Q + 250$, sedangkan biaya ditunjukkan oleh fungsi $C = 5Q^2 - 150Q + 50$, saudara diminta untuk menghitung;

1. Fungsi marjinal penerimaannya adalah;

a. $MR = -15Q + 250/Q$

b. $MR = -15Q^2 + 250Q$

c. $MR = -15Q + 280$

d. $MR = -30Q + 250$

2. Fungsi marjinal biaya untuk memproduksi barang A tersebut;

a. $MC = 10Q - 150$

b. $MC = 5Q - 150$

c. $MC = 5Q - 150Q$

d. $MC = 25Q - 150$

3. Fungsi laba perusahaan adalah;

a. $\pi = -20Q^2 + 400Q - 50$

b. $\pi = -4Q^2 + 160Q + 50$

c. $\pi = -8Q^2 + 160Q - 50$

d. $\pi = -8Q^2 + 400Q + 50$

4. Maka diferensial /turunan I dari fungsi laba tersebut adalah;

a. $\pi' = -8Q + 160$

b. $\pi' = -16Q + 400$

c. $\pi' = -40Q + 400$

d. $\pi' = -20Q + 400$

5. Jumlah/unit yang diproduksi /dijual agar laba perusahaan maksimum;

a. $Q = 25$ Unit

b. $Q = 20$ unit

c. $Q = 15$ unit

d. $Q = 10$ unit

6. Laba maksimum perusahaan adalah sebesar;

a. π maksimum = 1.550

b. π maksimum = 1.950

c. π maksimum = 3.750

d. π maksimum = 4.450

6.5.Laba dengan pajak spesifik

Contoh ; Permintaan barang A, $P = -Q + 50$, Fungsi biaya $C = Q^2 - 30Q + 5$, jika dibebankan pajak 8/unit, tentukan fungsi laba, unit yang terjual jika laba maksimum, laba maksimum dan total pajak.

$$R = P \cdot Q = (-Q + 50) \cdot Q = -Q^2 + 50Q$$

$$\text{Biaya setelah pajak } C_t = Q^2 - 30Q + 5 + 8Q = Q^2 - 22Q + 5$$

$$\text{Laba setelah Pajak, } \pi_t = R - C_t = (-Q^2 + 50Q) - (Q^2 - 22Q + 5) = -2Q^2 + 72Q - 5$$

$$\pi_t' = -4Q + 72 \qquad \pi_t'' = -4 < 0. \pi \text{ maksimum}$$

$$\pi \text{ maksimum, } \pi_t' = -4Q + 72 = 0 \longrightarrow Q = 18$$

$$\pi \text{ maksimum} = -2 \cdot 18^2 + 72 \cdot 18 - 5 = 643$$

$$\text{Total pajak} = 18 \cdot 8 = 144$$

Contoh soal

1. Permintaan suatu barang fungsinya adalah $P = -3Q + 180$, sedangkan untuk memproduksinya fungsi biaya $C = Q^2 - 40Q + 10$. Jika pemerintah membebankan terhadap produk tersebut dengan pajak sebesar 20/unit, maka; tentukan lah fungsi laba setelah pajak, unit yang terjual agar laba maksimum, laba maksimum dan total pajak.

2. Fungsi penerimaan rata-rata $AR = -Q + 90$ dan fungsi biaya rata-rata $AC = 2Q - 60 + 5/Q$, jika dibebankan pajak sebesar 18/unit, tentukan fungsi laba setelah pajak, unit yang terjual agar laba maksimum, laba maksimum, total pajak dan harga untuk mendapatkan laba maksimum.

3. Perusahaan monopoli produsen barang ABC, permintaan konsumen terhadap barang ABC tersebut, fungsinya ditunjukkan oleh $Q = -0,2P + 30$. Fungsi biaya adalah $C = Q^2 - 120Q + 15$. Jika pemerintah membebankan pajak terhadap setiap barang yang diproduksi sebesar $t = 30$ /unit. Saudara diminta oleh perusahaan untuk menghitung:

1. Fungsi penerimaan perusahaan:

$$\text{a. } R = -0,2Q^2 + 30Q$$

$$\text{b. } R = -5Q^2 + 30Q$$

$$\text{c. } R = 5Q^2 + 150$$

$$\text{d. } R = -5Q^2 + 150Q$$

$$\text{e. } R = -0,2Q^2 + 150Q$$

2. Fungsi Marjinal Penerimaan:

$$\text{a. } MR = -0,4Q + 30$$

$$\text{b. } MR = -25Q + 30$$

$$\text{c. } MR = -10Q + 150$$

$$\text{d. } MR = 10Q$$

$$e. MR = -0,04 Q + 150$$

3. Fungsi Biaya setelah dibebankan pajak:

$$a. C_t = Q^2 - 150 Q + 15$$

$$b. C_t = Q^2 - 90 Q + 15$$

$$c. C_t = Q^2 - 120 Q + 15$$

$$d. C_t = Q^2 - 60 Q + 45$$

$$e. C_t = Q^2 - 90 Q - 15$$

4. Fungsi laba perusahaan setelah dibebankan pajak sebesar 30/unit adalah:

$$a. \pi_t = -6 Q^2 + 300 Q - 15$$

$$b. \pi_t = -6 Q^2 + 270 Q + 15$$

$$c. \pi_t = -4 Q^2 + 240 Q + 15$$

$$d. \pi_t = -4 Q^2 + 300 Q - 15$$

$$e. \pi_t = -6 Q^2 + 240 Q - 15$$

4. Turunan Pertama fungsi laba setelah dibebankan pajak:

$$a. \pi_t' = -12 Q + 300$$

$$b. \pi_t' = -12 Q + 240$$

$$c. \pi_t' = -8 Q + 240$$

$$d. \pi_t' = -8 Q + 300$$

$$e. \pi_t' = -6 Q + 240 - 15/Q$$

6.6. Efek pajak bagi monopoli

Fungsi permintaan barang $P = -Q + 150$ dan fungsi biaya untuk memproduksi $C = Q^2 - 50Q + 10$. Jika pemerintah menginginkan penerimaan pajak maksimum dari hal tersebut, tentukan, fungsi pajak/unit, fungsi total pajak, unit yang terjual agar pajak maksimum, pajak /unit dan total pajak.

$$R = P \cdot Q = (-Q + 150) Q = -Q^2 + 150Q$$

$$\text{Biaya dengan beban pajak } C_t = Q^2 - 50Q + 10 + tQ$$

$$\text{Laba setelah pajak, } \pi_t = R - C_t = (-Q^2 + 150Q) - (Q^2 - 50Q + 10 + tQ)$$

$$\pi_t = -2Q^2 + 200Q - 10 - tQ$$

$$\pi_t' = -4Q + 200 - t$$

$$\pi_t \text{ ekstrim, } \pi_t' = -4Q + 200 - t = 0$$

$$t = -4Q + 200 \quad \longrightarrow \quad \text{fungsi pajak}$$

$$Tt = t \cdot Q = (-4Q + 200)Q = -4Q^2 + 200Q \quad \longrightarrow \quad \text{fungsi Total pajak}$$

$$Tt' = -8Q + 200$$

$$Tt'' = -8 < 0, \text{ Total pajak maksimum}$$

$$\text{Total pajak maksimum, } Tt' = -8Q + 200 = 0 \quad \rightarrow \quad Q = 25$$

$$\text{Pajak/unit, } t = -4Q + 200 = -4.25 + 200 = 100$$

$$\text{Total pajak maksimum, } Tt = -4Q^2 + 200Q = -4.25^2 + 200.25 = 2.500$$

Latihan soal

1. Permintaan barang ditunjukkan oleh fungsi $P = -3Q + 90$, sedangkan fungsi biaya rata-rata $AC = 2Q - 30 + 5/Q$. Untuk mendapatkan penerimaan pajak maksimum tentukan; fungsi pajak spesifik, fungsi total pajak dan unit yang terjual agar total pajak maksimum.

2. Suatu barang impor permintaannya ditunjukkan oleh fungsi $P + 4Q = 320$ sedangkan fungsi penawarannya adalah $2P - Q - 100 = 0$. Terhadap barang tersebut pemerintah menghendaki penerimaan pajak maksimum, saudara diminta untuk menghitung:

1. Fungsi pajak spesifik (per unit) terhadap barang impor tersebut:

- a. $t = 3P + 275$
- b. $t = -5P + 290$
- c. $t = -6Q + 290$
- d. $t = -5,5Q + 275$
- e. $t = -4,5Q + 270$

2. Fungsi Total pajak :

- a. $Tt = -4,5Q^2 + 270Q$
- b. $Tt = -5,5Q^2 + 275Q$
- c. $Tt = -6Q^2 + 290Q$
- d. $Tt = -5P^2 + 290P$
- e. $Tt = 3P^2 + 275P$

3. Derivatif I dari fungsi Total Pajak dari pernyataan diatas:

- a. $Tt' = -9Q + 270$
- b. $Tt' = -12Q + 290$
- c. $Tt' = -11Q + 275$
- d. $Tt' = -10P + 290$
- e. $Tt' = 9P + 275$

4. Unit/jumlah barang yang terjual sehingga diperoleh penerimaan pajak maksimum:

- a. $Q = 60$ unit
- b. $Q = 30$ unit
- c. $Q = 29$ unit
- d. $Q = 25$ unit
- e. $Q = 24$ unit

5. Beban pajak/unit untuk mendapatkan Total Pajak maksimum:

- a. $t = 370/\text{unit}$
- b. $t = 270/\text{unit}$
- c. $t = 185/\text{unit}$
- d. $t = 135/\text{unit}$
- e. $t = 115/\text{unit}$

6. Total pajak maksimum yang diterima pemerintah:

a. $Tt = 4.950$

b. $Tt = 4.050$

c. $Tt = 3.725$

d. $Tt = 3.650$

e. $Tt = 3.500$

7. Jika jumlah barang yang terjual sebanyak 20 unit, maka Total Pajak yang diterima adalah

a. $Tt = 3.800$

b. $Tt = 3.600$

c. $Tt = 3.300$

d. $Tt = 2.800$

e. $Tt = 2.650$

8. Total Pajak yang diterima pemerintah, jika yang terjual sebanyak 20 unit tersebut sama nilai Total Pajak pada tingkat penjualan:

a. $Tt_{(Q=20)} = Tt_{(Q=55)}$

b. $Tt_{(Q=20)} = Tt_{(Q=50)}$

c. $Tt_{(Q=20)} = Tt_{(Q=40)}$

d. $Tt_{(Q=20)} = Tt_{(Q=10)}$

e. $Tt_{(Q=20)} = Tt_{(Q=0)}$

9. Jika total pajak yang diterima sebesar 6.000, maka jumlah barang yang terjual adalah:

a. $Q = 65$ unit

b. $Q = 52$ unit

c. $Q = 48$ unit

d. $Q = 45$ unit

e. Tak terdefinisi

6.7. Penerimaan total pajak maksimum

Dalam keseimbangan pasar, fungsi penawaran $P = a + bQ$, bila pemerintah membebankan pajak spesifik sebesar t untuk setiap unit yang terjual maka fungsi penawaran setelah pajak adalah;

$$P = a + bQ + t$$

Sedangkan fungsi total pajak

$$Tt = t \cdot Q$$

Contoh

Permintaan dan penawaran suatu barang fungsinya adalah $P = -Q + 60$ dan $P = Q$, jika pemerintah menginginkan penerimaan pajak maksimum, tentukan fungsi pajak, fungsi total pajak, pajak/unit, total pajak.

Setelah pajak

$$D; \quad P = -Q + 60$$

$$St; \quad Pt = Q + t$$

$$Et; \quad D = St$$

$$-Q + 60 = Q + t$$

$$t = -2Q + 60 \quad \longrightarrow \quad \text{fungsi pajak spesifik}$$

$$Tt = t \cdot Q = (-2Q + 60)Q = -2Q^2 + 60Q \quad \longrightarrow \quad \text{fungsi Total pajak}$$

$$Tt' = -4Q + 60$$

$$Tt'' = -4 < 0, Tt \text{ maksimum}$$

$$\text{Total pajak maksimum, } Tt' = -4Q + 60 = 0 \quad \longrightarrow \quad Q = 15$$

$$\text{Pajak spesifik, } t = -2Q + 60 = -2 \cdot 15 + 60 = 30$$

$$\text{Total pajak maksimum, } Tt = -2Q^2 + 60Q = -2 \cdot 15^2 + 60 \cdot 15 = 450$$

Soal latihan

1. Permintaan suatu barang ditunjukkan oleh fungsi $P = -5Q + 120$ dan penawarnya $P = 2Q + 50$. Jika dibebankan pajak t /unit, dan penerimaan pajak yang dikehendaki maksimum. Hitunglah pajak/unit dan penerimaan pajak maksimum tersebut.

2. Permintaan dan penawaran suatu barang elektronik fungsinya adalah $P = -4Q + 14.000$ dan $Q = 0,5P - 1.000$, bila terhadap barang tersebut dibebankan pajak sebesar t /unit dan pemerintah menginginkan penerimaan pajak maksimum dari barang tersebut :

1. Fungsi pajak dari pernyataan diatas adalah;

a. $t = -5Q + 1.500$

b. $t = -5Q + 5.500$

c. $t = -6Q + 12.000$

d. $t = -6Q + 16.000$

2. Fungsi total pajak adalah;

a. $Tt = -5Q^2 + 1.500Q$

b. $Tt = -5Q^2 + 5.500Q$

c. $Tt = -6Q^2 + 12.000Q$

d. $Tt = -6Q^2 + 16.000Q$

3. Jumlah/unit yang memaksimumkan penerimaan pajak pemerintah adalah;

a. $Q = 1.600$ unit

b. $Q = 1.000$ unit

c. $Q = 550$ unit

d. $Q = 150$ unit

4. Maka beban pajak/unit adalah;

a. $t = 4.000$ /unit

b. $t = 6.000$ /unit

c. $t = 7.500$ /unit

d. $t = 10.000$ /unit

5. Total penerimaan pajak pemerintah (nilai maksimum);

a. $Tt = 9.600.000$

b. $Tt = 7.200.000$

c. $Tt = 9.000.000$

d. $Tt = 6.000.000$

6. Harga barang setelah dibebankan pajak;

a. $P = 10.000$ /unit

b. $P = 8.000$ /unit

c. $P = 6.000$ /unit

d. $P = 4.000$ /unit

6.8. Marginal Utilitas (MU)

$$U = f(Q)$$

$$\text{Marginal Utility} = MU = \frac{dU}{dQ}$$

Fungsi utilitas suatu barang $U = -1,5Q^2 + 45Q$, tentukan jumlah barang yang digunakan agar utilitas maksimum dan nilai utilitas maksimum tersebut.

$$U = -1,5Q^2 + 45Q$$

$$MU = -3Q + 45$$

$$MU' = -3 < 0, \text{ Utilitas maksimum}$$

$$\text{Utilitas maksimum, } MU = -3Q + 45 = 0 \quad \longrightarrow \quad Q = 15$$

$$\text{Utilitas maksimum, } U = -1,5Q^2 + 45Q = -1,5 \cdot 15^2 + 45 \cdot 15 = 337,5$$

Soal latihan

1. Fungsi utilitas $U = -2,5Q^2 + 80Q$, untuk mendapatkan utilitas maksimum berapa unit yang diperlukan dan berapa nilai utilitas maksimum tersebut.

2. Fungsi Utilitas suatu barang adalah $U = -3,5 Q^2 + 126 Q$, hitunglah;

1. Fungsi Marjinal Utilitas:

a. $MU = -1,5 Q + 126$

b. $MU = -3,5 Q + 126$

c. $MU = -5,5 Q + 126$

d. $MU = -7 Q + 126$

2. Unit yang digunakan jika Utilitas maksimum;

a. $Q = 18$ unit

b. $Q = 23$ unit

c. $Q = 36$ unit

d. $Q = 84$ unit

3. Utilitas maksimum;

a. U maksimum = 1.134

b. U maksimum = 1.047

c. U maksimum = 982

d. U maksimum = 768

4. Jika jumlah barang yang digunakan sebanyak 12 unit maka utilitas yang diperoleh;

a. $U_{12} = U$ maksimum

b. $U_{12} > U$ maksimum

c. $U_{12} < U$ maksimum

d. $U_{12} = 0$

Daftar Pustaka

- Chiang, Alpha, *Fundamental Method oh Mathematical Economics*, McGraw-Hill, International Edition, 3th edition, 1984.
- Dumairy, Matematika Terapan Untuk Bisnis dan Ekonomi, edisi kedua, BPFE, Yogyakarta, 2003.
- Jakaria, Eleonora, Matematika Ekonomi Untuk Ilmu Ekonomi dan Bisnis, edisi kedua, Andrea Publisher, Jakarta, 2009.
- Kalangi, Josep Bintang, Matematik Ekonomi dan Bisnis, Penerbit Salemba Empat, Jakarta, 2005.