UNIVERSITAS PERSADA INDONESIA Y.A.I
FAKULTAS EKONOMI DAN BISNIS
Kampus A: Jl. Diponegoro No. 74 Jakarta Pusat 10340, Indonesia
Telepon : (021) 3904858, 31936540 Fax: (021) 3150604

Jakarta, 13 september 2018

Nomor : 596/D/FEB UPI Y.A.I/IX/2018
Lampiran : -
Perihal : Surat Tugas

Kapada Yth,

Bida Sari, SP, M.Si

Dosen Tetap Fakultas Ekonomi dan Bisnis UPI Y.A.I

Di

Tempat

Berdasarkan hasil evaluasi dari Program Akuntansi UPI Y.A.I terhadap kebutuhan bahan ajar Mata Kuliah Matemetika Ekonomi dan Bisns yang akan diberikan kepada mahasiswa UPI Y.A.I, maka kami menugaskan Ibu untuk membuat bahan ajar yang dimaksud, agar dapat segera digunakan oleh mahasiswa UPI Y.A.I.

Bahan ajar tersebut agar dapat diselesaikan paling lambat 1 semester terhitung sejak surat tugas ini ditanda tangani.

Demikian surat tugas ini dibuat untuk dapat dilaksanakan sebagaimana mestinya..

Hormat kami,
Fakultas Ekonomi dan Bisnis UPI Y.A.I

Dr. Marhalinda, SE. MM
Dekan

Tembusan :
Yth. Rektor Universitas Persada Indonesia Y.A.I

UNIVERSITAS PERSADA INDONESIA Y.A.I
FAKULTAS EKONOMI DAN BISNIS
Kampus A: Jl. Diponegoro No. 74 Jakarta Pusat 10340, Indonesia
Telepon : (021) 3904858, 31936540 Fax: (021) 3150604

Jakarta, 17 September 2018

No. : 027 /Perpus FEB UPI YAI/IX/2018
Lampiran : -
Perihal : Surat Keterangan Penerimaan Modul Ajar
Di Perpustakaan FEB UPI Y.A.I.

Kepada Yth.
Bida Sari, SP, M.Si
Dosen Fakultas Ekonomi dan Bisnis UPI Y.A.I.
Di Tempat

Dengan hormat,

Dengan ini Perpustakaan Fakultas Ekonomi dan Bisnis UPI Y.A.I telah menerima satu modul Matematika Ekonomi dan Bisnis atas nama :

Penulis	:	Bida Sari, SP, M.Si
N I D N	:	0317047302
Program Studi	:	Akuntansi
Fakultas	:	Fakultas Ekonomi dan Bisnis
Pusat Penelitian	:	Universitas Persada Indonesia Y.A.I.

Modul ajar ini dijadikan bahan referensi di lingkungan Fakultas Ekonomi dan Bisnis UPI YAI

Demikian surat keterangan ini dibuat untuk dapat digunakan sebagaimana mestinya atas kerjasamanya kami ucapkan terima kasih.

Mengetahui
Dekan FEB UPI YAI

Dr. Marhalinda, S.E.,M.M

Perpustakaan FEB UPI YAI
Kepala Perpustakaan

Ruwaida, S.Sos., MSi

MODUL AJAR

MATEMATIKA EKONOMI

Penulis :

BIDA SARI, SP, M.Si.

(NIDN : 0317047302)

Fakultas Ekonomi dan Bisnis

UNIVERSITAS PERSADA INDONESIA Y.A.I

J A K A R T A

2018

HALAMAN PENGESAHAN
MODUL AJAR

1. Judul	:	**MATEMATIKA EKONOMI DAN BISNIS**
2. Penulis Modul	:	Bida Sari, SP, MSi.
3. Tempat Penerapan	:	Fakultas Ekonomi dan Bisnis UPI Y.A.I
4. Jangka Waktu Kegiatan	:	1 (satu) Semester
5. Sifat Kegiatan	:	Pembuatan / Penyusunan Modul Ajar
6. Sumber Dana	:	Pribadi

Penulis Modul,

Bida Sari, S.P, M.Si.
(NIDN : 0317047302)

Mengetahui,
Fakultas Ekonomi dan Bisnis
Universitas Persada Indonesia Y.A.I

Dekan

Dr. Marhalinda, S.E, M.M.
(NIDN : 0325036102)

Kepala Program Studi Akuntansi

Dr.Lely Indriaty, S.E., M.M.
(NIDN : 0005086201)

KATA PENGANTAR

Konsep-konsep matematika menjadi alat analisis yang penting dalam ilmu ekonomi. Matematika dapat menyederhanakan penyajian dan pemahaman masalah-masalah ekonomi. Matematika Ekonomi dan Bisnis bertujuan memberikan pengertian yang lebih mendalam tentang konsep-konsep dasar ilmu ekonomi dengan menerapkan matematika dalam bahasan-bahasannya.

Modul bahan ajar ini berisi uaraian, contoh-contoh soal dan latihan mengenai penerapan konsep-konsep matematika dalam bidang ekonomi dan bisnis. Materi disusun berdasarkan Satuan Acara Perkulihaan (SAP) mata kuliah matematika ekonomi dan bisnis selama satu semester pada fakultas ekonomi, sekolah tinggi ekonomi dan akademi yang mengajarkan ilmu yang berkaitan dengan bidang ekonomi dan bisnis. Penyajian setiap bab diawali dengan model-model matematika murni, disusul dengan penjelasan ringkas tentang logika dari konsep-konsep ekonomi yang menerapakan model tersebut, kemudian penerapan model matematika itu sendiri dalam konsep ekonomi yang bersangkutan beserta contoh-contoh praktisnya.

Buku ini disusun sedemikian rupa agar dapat dipahami dengan mudah oleh mahasiswa dan dapat bermanfaat sebagai pelengkap acuan terutama bagi mahasiswa yang mengambil mata kuliah matematika ekonomi dan bisnis.

Akhirnya, penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu secara langsung maupun tidak langsung hingga tersusunnya modul bahan ajar ini. Semoga buku ini dapat bermanfaat dan kritik serta saran-saran bagi perbaikan kedepannya sangat diharapkan.

Jakarta, September 2018

P e n u l i s

DAFTAR ISI

Halaman Pengesahan ……. i

Kata Pengantar …… ii

Daftar Isi …….. iii

BAB I **DASAR – DASAR ALJABAR** ……... 1

1.1 Dasar – Dasar Aljabar ……... 1
1.2 Bilangan Berpangkat …… 4
1.3 Akar …….. 6
1.4 Special Product ……. 9
1.5 Latihan Soal ……. 10

BAB II **FUNGSI LINEAR** ……. 11

2.1 Jenis – Jenis Fungsi ……. 11
2.2 Pembentukan Fungsi Linear …… 14
2.3 Kemiringan dan Titik Potong Sumbu ……. 18
2.4 Hubungan Dua Garis Lurus …… 19
2.5 Koordinat Titik Potong Dua Fungsi …… 22
2.6 Metode Persamaan Garis dan Menggambar Grafik ……. 24
2.7 Latihan Soal …… 27

BAB III **APLIKASI FUNGSI LINEAR DALAM EKONOMI** …….. 29

3.1 Fungsi Permintaan, Fungsi Penawaran, dan Keseimbangan Pasar…… 29
3.2 Efek Pajak dan Subsidi pada Keseimbangan Pasar …… 37
3.3 Fungsi Biaya, Fungsi Penerimaan, dan Analisis Pulang Pokok (BEP) …….. 45
3.4 Fungsi Konsumsi, Fungsi Tabungan, dan Model Penentuan Pendapatan Nasional ……. 51
3.5 Latihan Soal ……... 56

BAB IV **FUNGSI KUADRAT (PARABOLA)** …….. 59

4.1 Jenis Fungsi Kuadrat ……. 59
4.2 Koordinat Titik Potong Sumbu ……. 67
4.3 Nilai Ekstrim: Maksimum dan Minimum ……. 67
4.4 Koordinat Titik Potong Dua Fungsi dan Menggambar

Grafik …… 72
4.5 Latihan Soal …….. 73

BAB V **APLIKASI FUNGSI KUADRAT DALAM EKONOMI** ……. 74

5.1 Fungsi Permintaan, Fungsi Penawaran, dan Keseimbangan Pasar …… 74
5.2 Efek Pajak dan Subsidi pada Keseimbangan Pasar …… 77
5.3 Fungsi Biaya, Fungsi Penerimaan, Fungsi Laba/Rugi, dan Analisis Pulang Pokok (BEP) …… 84
5.4 Fungsi Utilitas …… 91
5.5 Fungsi Produksi ……. 91

BAB VI **DEFERENSIAL SEDERHANA** …… 93

6.1 Kuosien Diferensi dan Derivatif …….. 93
6.2 Hakikat Derivatif dan Diferensial …… 95
6.3 Kaidah-Kaidah Diferensial …….. 97
6.4 Hubungan Fungsi dan Derivatifnya ……. 105
6.5 Latihan Soal ……. 108

BAB VII **APLIKASI DEFERENSIAL SEDERHANA DALAM EKONOMI** ……. 110

7.1 Elastisitas Permintaan, Penawaran, dan Produksi …… 110
7.2 Konsep Nilai Marjinal dan Nilai Ekstrim: Maksimum atau Minimum pada Fungsi Biaya, Penerimaan, Utilitas, dan Produksi …… 112
7.3 Analisis Keuntungan Maksimum …… 116
7.4 Penerimaan Pajak Maksimum ……. 118
7.5 Efek Pemajakan bagi Penunggal ……. 119

BAB VIII **DEFERENSIAL MULTIVARIABEL** …… 120

8.1 Diferensial Parsial …….. 120
8.2 Derivatif dari Derivatif Parsial ……. 121
8.3 Nilai Ekstrim: Maksimum dan Minimum …… 122
8.4 Optimasi Bersyarat (Metode Lagrange) …….. 123
8.5 Latihan Soal …….… 125

BAB IX **APLIKASI DEFERENSIAL MULTIVARIABEL DALAM EKONOMI** …… 126

9.1 Permintaan Marjinal dan Elastisitas Pemintaan Parsial ….. 126

9.2 Fungsi Biaya, Penerimaan, dan Laba, serta Penerimaan Pajak Maksimum…… 129
9.3 Utilitas Marjinal Parsial dan Keseimbangan Konsumsi … 130
9.4 Produk Marjinal Parsial dan Keimbangan Produksi …… 133
9.5 Latihan Soal ……..… 137

Daftar Pustaka …….. 139

BAB I

DASAR – DASAR ALJABAR

1.1 Dasar – Dasar Aljabar

A. Pengertian

1. **Variabel**

Variabel dapat diartikan sebagai lambang atau simbol yang digunakan untuk mewakili suatu bilangan yang nilainya belum diketahui dengan jelas. Variabel biasa disimbolkan dengan huruf kecil a, b, c, d, e, f, g, ..., z. Sebagai contoh, pada persamaan (3x + 14 y) variabelnya adalah x dan y.

2. **Koefisien**

Koefisien adalah bilangan yang diikuti variable dibelakangnya pada tiap-tiap suku. Contoh: $\mathbf{5}\boldsymbol{x}$, artinya 5 adalah koefisien *x;*
$\mathbf{8}\boldsymbol{y}$, artinya 8 adalah koefisien *y;* $\boldsymbol{a^2}$, artinya 1 adalah koefisien $a^{2.}$

3. **Konstanta**

Konstanta adalah suku aljabar yang bentuknya berupa sebuah bilangan yang bediri sendiri tanpa diikuti variabel. Sebagai contoh pada persamaan (3x2 + 4y - z + 12) maka konstantanya adalah 12.

4. **Suku**

Suku merupakan nilai yang menyusun sebuah bentuk aljabar baik berupa variabel dengan koefisiennya dan juga konstanta. Berikut adalah penjelasan macam-macam suku aljabar:

a. **Suku Satu**

merupakan bentuk aljabar yang tidak memiliki tanda operasi hitung atau selisih. Contohnya: 2x, $4c^2$, 3xy

b. Suku Dua (Binom)

merupakan bentuk aljabar yang terhubung oleh adanya satu tanda operasi hitung atau selisih. Contohnya: x + y, 2a + 3c, $4x^2$- y^2

c. Suku Tiga (Trinom)

Merupakan bentuk aljabar yang terhubung oleh adanya dua tanda operasi hitung atau selisih. Contohnya:

3x - 4y + z, $2a^2$ + 3b + c

B. Operasi Penjumlahan pada Aljabar

Berikut adalah contoh operasi penjumlahan dalam aljabar

1. $(10x^2 + 6xy - 12) + (-4x^2 - 2xy + 10)$

   Jawab: $= 10x^2 - 4x^2 + 6xy - 2xy - 12 + 10$

   $= 6x^2 + 4xy - 2$

2. $-y^2 + 7y^2$

   Jawab: $= 6y^2$

C. Operasi Pengurangan pada Aljabar

Berikut adalah contoh operasi pengurangan dalam aljabar

1. $(8p^2 - 10p - 5) - (4p^2 + 10p + 15)$

   Jawab : $= (8p^2 - 10p - 5) - (4p^2 + 10p + 15)$

   $= 8p^2 - 4p^2 - 10p - 10p - 5 - 15$

   $= 4p^2 - 20p - 20$

2. $(10p - 8) - (8p - 10)$

   Jawab : $= 10p - 8 - 8p + 10$

$= 10p - 8p - 8 + 10$

$= 2p + 2$

D. Operasi Perkalian pada Aljabar

Berikut adalah contoh operasi perkalian dalam aljabar

1. Perkalian suku satu dengan suku dua

   a. $2(x + 3)$

      Jawab: $= 2x + 6$

   b. $-4(9 - y)$

      Jawab: $= -36 + 4y$

2. Perkalian suku dua dengan suku dua

   a. $(2x + 1)^2$

      Jawab: $= (2x + 1)(2x + 1)$

      $= 4x^2 + 2x + 2x + 1$

      $= 4x^2 + 4x + 1$

   b. $(3x + 2)(3x + 1)$

      Jawab : $= 9x^2 + 3x + 6x + 2$

      $= 9x^2 + 9x + 2$

E. Operasi Pembagian pada Aljabar

Berikut adalah contoh operasi pembagian dalam aljabar

1. $3x : 3$

   Jawab: $= x$

2. $10pqr : 2p$

   Jawab: $= 5qr$

1.2 Bilangan Berpangkat

A. Pengertian

Pangkat dari sebuah bilangan ialah suatu indeks yang menunjukkan banyaknya perkalian bilangan yang sama secara beruntun. Notasi x^a berarti bahwa x harus dikalikan dengan x itu sendiri secara berturut-turut sebanyak a kali. Notasi pemangkatan sangat berfaedah untuk merumuskan penulisan bentuk perkalian secara ringkas. Sebagai contoh : perkalian bilangan 7 sebanyak 5 kali tak perlu dituliskan dengan lengkap 7x7x7x7x7, melainkan cukup diringkas menjadi 7^5.

Notasi pemangkatan dapat untuk meringkas bilangan kelipatan perkalian-sepuluh yang nilainya sangat besar atau sangat kecil. Sebagai contoh : bilangan 100.000 dapat diringkas menjadi 10^5 ; bilangan 1/100.000 atau 0,00001 dapat diringkas menjadi 10^{-5}.

B. Kaidah Pemangkatan Bilangan

1. Bilangan bukan-nol berpangkat nol adalah satu.

   $\boxed{x^0 = 1 \quad (x \neq 0)}$ Contoh : $3^0 = 1$

2. Bilangan berpangkat satu adalah bilangan itu sendiri.

   $\boxed{x^1 = x}$ Contoh : $3^1 = 3$

3. Nol berpangkat sebuah bilangan adalah tetap nol.

   $\boxed{0^x = 0}$ Contoh : $0^3 = 0$

4. Bilangan berpangkat negative adalah balikan pengali *(multiplicative inverse)* dari bilangan itu sendiri.

$$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$$

Contoh : $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} \left(\frac{1}{9} = 9^{-1}\right)$

5. Bilangan berpangkat pecahan adalah akar dari bilangan itu sendiri, dengan suku pembagi dalam pecahan menjadi pangkat dari akarnya sedangkan suku terbagi menjadi pangkat dari bilangan yang bersangkutan.

$$x^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{x^a}$$

Contoh : $3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2} = \sqrt[5]{9} = 1{,}55$

6. Bilangan pecahan berpangkat adalah hasilbagi suku-suku berpangkatnya.

$$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$$

Contoh : $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$

7. Bilangan-berpangkat dipangkatkan lagi adalah bilangan berpangkat hasilkali pangkat-pangkatnya.

$$(x^a)^b = x^{ab}$$

Contoh : $(3^2)^4 = 3^{2.4} = 3^8 = 6.561$

8. Bilangan dipangkatkan pangkat-berpangkat adalah bilangan berpangkat hasil pemangkatan pangkatnya.

$$x^{a^b} = x^c$$

Di mana $c = a^b$

Contoh : $3^{2^4} = 3^{16} = 43.046.721$

C. Kaidah Perkalian Bilangan Berpangkat

9. Hasilkali bilangan-bilangan berpangkat yang basisnya sama adalah bilangan basis berpangkat jumlah pangkat-pangkatnya.

$$\boxed{x^a . x^b = x^{a+b}}$$ Contoh : $3^2 . 3^4 = 3^{2+4} = 3^6 = 729$

10. Hasilkali bilangan-bilangan berpangkat yang pangkatnya sama, tetapi basisnya berbeda, adalah perkalian basis-basisnya dalam pangkat yang bersangkutan.

$$\boxed{x^a . y^a = (xy)^a}$$ Contoh : $3^2 . 5^2 = (3.5)^2 = 15^2 = 225$

D. Kaidah Pembagian Bilangan Berpangkat

11. Hasilbagi bilangan-bilangan berpangkat yang basisnya sama adalah bilangan basis berpangkat selisih pangkat-pangkatnya.

$$\boxed{x^a : x^b = x^{a-b}}$$ Contoh : $3^2 : 3^4 = 3^{2-4} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$

12. Hasilbagi bilangan-bilangan berpangkat yang pangkatnya sama, tetapi basisnya berbeda, adalah pembagian basis-basisnya dalam pangkat yang bersangkutan.

$$\boxed{x^a : y^a = \left(\frac{x}{y}\right)^a}$$ Contoh : $3^2 : 5^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$

1.3 Akar

A. Pengertian

Akar merupakan bentuk lain untuk menyatakan bilangan berpangkat. Akar dari sebuah bilangan ialah basis yang memenuhi bilangan tersebut berkenaan dengan pangkat akarnya. Berdasarkan konsep pemangkatan, bahwa jika bilanganyang sama (misalnya x) dikalikan

sejumlah tertentu sebanyak (katakanlah) a kali, maka kita dapat menuliskannya menjadi x^a ; x disebut $basis$ dan a disebut $pangkat$. Andaikata $x^a = m$, maka x dapat juga disebut sebagai akar pangkat a dari m, yang jika dituliskan dalam bentuk akar menjadi $x = \sqrt[a]{m}$. Jadi, $\sqrt[a]{m} = x$, sebab $x^a = m$. Sebagai contoh : $\sqrt[3]{64} = 4$ sebab $4^3 = 64$.

B. Kaidah Pengakaran Bilangan

1. Akar dari sebuah bilangan adalah yang memenuhi bilangan tersebut berkenaan dengan pangkat akarnya.

   $$\boxed{\sqrt[b]{x} = x^{\frac{1}{b}}}$$

   Berdasarkan $\sqrt[a]{m} = x$ jika $x^a = m$ (x adalah basis), maka:

   Contoh : $\sqrt[3]{64} = 64^{\frac{1}{3}} = 4$

   Sebab $\left(x^{\frac{1}{b}}\right)^b = x^{\frac{b}{b}} = x^1 = x$ Dalam hal ini $x^{\frac{1}{b}}$ adalah basis

2. Akar dari sebuah bilangan berpangkat adalah bilangan itu sendiri berpangkat pecahan, dengan pangkat dari bilangan bersangkutan menjadi suku terbagi sedangkan pangkat dari akar menjadi suku pembagi.

   $$\boxed{\sqrt[b]{x^a} = x^{\frac{a}{b}}}$$

   Contoh : $\sqrt[5]{3^2} = 3^{\frac{2}{5}} = 1{,}55$

3. Akar dari suatu perkalian bilangan adalah perkalian dari akar-akarnya.

   $$\boxed{\sqrt[b]{xy} = \sqrt[b]{x} \,.\, \sqrt[b]{y}}$$

   Contoh : $\sqrt[3]{8.64} = \sqrt[3]{8} \,.\, \sqrt[3]{64} = 2.4 = 8$

4. Akar dari sebuah bilangan pecahan adalah pembagian dari akar suku-sukunya.

$$\sqrt[b]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[b]{x}}{\sqrt[b]{y}}$$

Contoh : $\sqrt[3]{\frac{8}{64}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{2}{4}$ = 0,5

C. Kaidah Penjumlahan (Pengurangan) Bilangan Terakar

5. Jumlah (selisih) bilangan-bilangan terakar adalah jumlah (selisih) koefisien-koefisiennya terakar.

$$m\sqrt[b]{x^a} \pm n\sqrt[b]{x^a} = (m \pm n)\sqrt[b]{x^a}$$

Contoh : $5\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$ = 7 (1,73) = 12,11

D. Kaidah Perkalian Bilangan Terakar

6. Hasilkali bilangan-bilangan terakar adalah akar dari hasilkali bilangan-bilangannya. Perkalian hanya dapat dilakukan apabila akar-akarnya berpangkat sama.

$$\sqrt[b]{x} \cdot \sqrt[b]{y} = \sqrt[b]{xy}$$

Contoh : $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{8.64} = \sqrt[3]{512} = 8$

7. Akar ganda dari sebuah bilangan adalah akar pangkat baru dari bilangan bersangkutan; pangkat-baru akarnya ialah hasilkali pangkat dari akar-akar sebelumnya.

$$\sqrt[b]{\square}\,\sqrt[c]{x^a} = \sqrt[bc]{x^a}$$

Contoh: $\sqrt{}\,\sqrt[3]{15.625} = \sqrt[2.3]{15.625} = 5$

E. Kaidah Pembagian Bilangan Terakar

8. Hasil bagi bilangan-bilangan terakar adalah akar dari hasil bagi bilangan-bilangannya. Pembagian hanya dapat dilakukan apabila akar-akarnya berpangkat sama.

$$\boxed{\frac{\sqrt[b]{x}}{\sqrt[b]{y}} = \sqrt[b]{\frac{x}{y}}}$$

Contoh : $\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[3]{\frac{8}{64}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = 0{,}5$

1.4 Special Product

1. $2x + 4 = 10 \therefore x = \frac{10-4}{2} = 3$
2. $2x + 2y - 4 = 0 \therefore x = \frac{4-2y}{2}, y \frac{4-2x}{2}$
3. $x^m . x^n = x^{m+n}$
4. $(x^m)^n = x^{m.n}$
5. $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$
6. $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$
7. $\frac{1}{x^n} = x^{-2}$
8. $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$
9. $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{2}}$
10. $x^0 = 1$
11. $1^n = 1$
12. $x^1 = x$
13. $(x - a)^2 = x^2 - 2xa + a^2$
14. $a(b + c) = ab + ac$
15. $(x - a)(x - b) = x^2 - bx - ax + ab$

1.5 Latihan Soal

1. Tentukan nilai dari $\frac{5^{2-n}-(0,2)^n}{5^{1-n}+(0,2)^n} = \cdots$

$$\frac{5^{2-n}-(0,2)^n}{5^{1-n}+(0,2)^n}$$

$$= \frac{\frac{5^2}{5^n}-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{\frac{5}{5^n}+\left(\frac{1}{5}\right)^n}$$

$$= \frac{\frac{5^2}{5^n}-(5^{-1})^n}{\frac{5}{5^n}+(5^{-1})^n}$$

$$= \frac{\frac{5^2}{5^n}-5^{-n}}{\frac{5}{5^n}+5^{-n}} = \frac{\frac{25}{5^n}-\frac{1}{5^n}}{\frac{5}{5^n}+\frac{1}{5^n}} = \frac{\frac{25-1}{5^n}}{\frac{5+1}{5^n}} = \frac{\frac{24}{5^n}}{\frac{6}{5^n}} = \frac{24}{5^n}\times\frac{5^n}{6} = 4$$

2. Tentukan nilai $\sqrt{\sqrt[3]{16}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \cdots$

$$\sqrt{\sqrt[3]{16}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

$$= \sqrt{\sqrt[3]{2^4}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{2^2}}$$

$$= \sqrt{2^{\frac{4}{3}}} \times \sqrt[3]{2^{-2}}$$

$$= \left(2^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \times 2^{-\frac{2}{3}}$$

$$= 2^{\left(\frac{2}{3}+\left(-\frac{2}{3}\right)\right)}$$

$$= 2^0 = 1$$

BAB II

FUNGSI LINEAR

Fungsi linear adalah fungsi paling sederhana karena hanya mempunyai satu variabel bebas dan berpangkat satu pada variabel tersebut.

$Y = a_0 + a_1 x^1$ *Y* variabel terikat, *x* variabel bebas.

a_0 konstanta, nilai positif, negatif, atau nol.

a_1 koefisien, nilai positif, negatif, atau nol.

2.1 Jenis-Jenis Fungsi

A. Fungsi Eksplisit

Suatu fungsi di mana variabel bebas dan variabel tak bebas dapat dengan jelas dibedakan letaknya, dengan kata lain Y ruas kiri dan X ruas kanan.

<u>*Contoh Fungsi*</u>: $y = f(x) \rightarrow y \quad = 2x + 3$

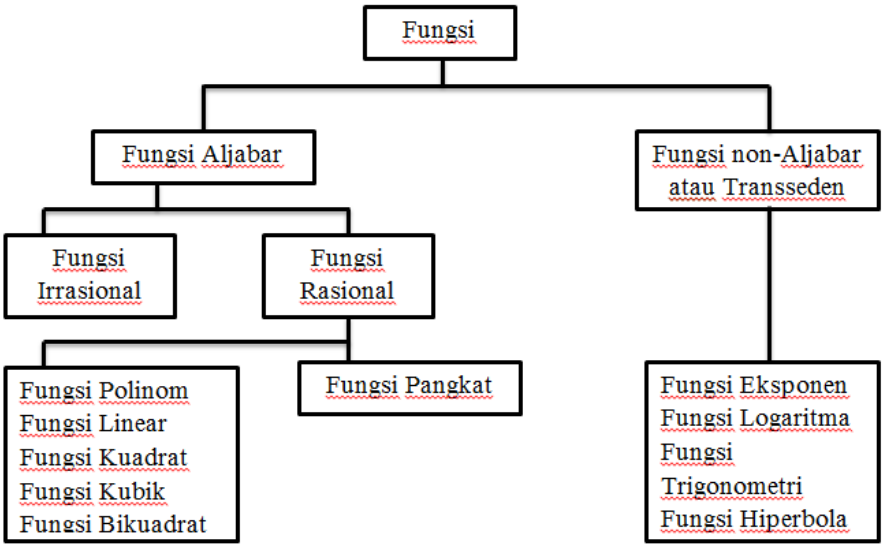
$z = f(x, y) \rightarrow z = 2x + y^2 + 3$

B. Fungsi Implisit

Fungsi implisit adalah suatu fungsi di mana variabel bebas dan variabel tak bebasnya tidak dapat dengan mudah dibedakan. Dengan kata lain Y maupun X semuanya terletak di ruas kanan atau kiri (dalam satu ruas).

<u>*Contoh Fungsi*</u>: $f(x, y) \quad \rightarrow 2x + 3y - 5 = 0$

$f(x, y, z) \rightarrow 2x + y - 3z + 4 = 0$



C. Fungsi Irrasional

Fungsi yang variabel bebasnya terdapat dibawah tanda akar.

Bentuk umum : $Y = \sqrt[n]{a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots\ldots\ldots + a_nx^n}$;n

<u>Contoh:</u> $Y = (1 + 2x^1 - 3x^2 + 4x^3 + \ldots\ldots\ldots + 12\,x^{11})^{1/11}$

D. Fungsi Polinom

Fungsi yang memiliki banyak suku.

Bentuk umum :

$Y = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n$; n bilangan bulat positif

<u>Contoh:</u> $Y = 1 + 2x^1 - 3x^2 + 4x^3 + \ldots\ldots\ldots - 12x^{11}$; $n = 11$

E. Fungsi Linear

Fungsi polinom yang variabel bebasnya memiliki pangkat paling tinggi adalah satu.

Bentuk umum : $Y = a_0 + a_1x^1$

Contoh : Y = 1 + 2 x^1

F. Fungsi Kuadrat

Fungsi polinom yang variabel bebasnya memiliki pangkat paling tinggi adalah dua.

Bentuk umum : $Y = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2$

Contoh : $Y = 1 - 2x^1 - 3x^2$

G. Fungsi Kubik

Fungsi polinom yang variabel bebasnya memiliki pangkat tinggi adalah tiga.

Bentuk umum : $Y = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3$

Contoh : $Y = 1 + 2x^1 - 3x^2 + 4x^3$

H. Fungsi Bikuadrat

Fungsi polinom yang variabel bebasnya memiliki pangkat paling tinggi adalah empat.

Bentuk umum : $Y = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$

Contoh : $Y = 1 + 2x^3 + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4$

I. Fungsi Pangkat

Fungsi yang variabel bebasnya berpangkat suatu bilangan riil positif.

Bentuk umum : $Y = x^n, n$ bilangan riil positif

Contoh : $Y = x^2$

J. Fungsi Eksponen

Fungsi yang variabel bebasnya berpangkat suatu bilangan riil positif.

Bentuk umum : $Y = n^x$

Contoh : $Y = 2^x$

K. Fungsi Logaritma

Fungsi yang merupakan invers fungsi eksponen.

Bentuk umum : $Y = n \log x$

Contoh : $Y = 4 \log x$

L. Fungsi Hiperbola

Fungsi yang variabel bebasnya berpangkat bilangan riil negatif.

Bentuk umum : $Y = x^n, n$ bilangan riil negatif

Contoh : $Y = x^{-2}, n$ bilangan riil negative

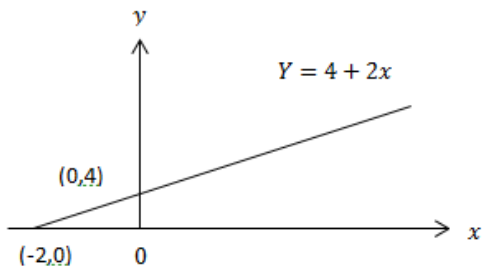
2.2 Pembentukan Fungsi Linear

Penggambaran fungsi linear dari berbagai alternatif untuk $a_0 = 4$ dan $a_1 = 2$

1. $Y = 4 + 2$

Dua buah titik yang dibutuhkan untuk menggambarkannya (0,4) dan (-2,0)

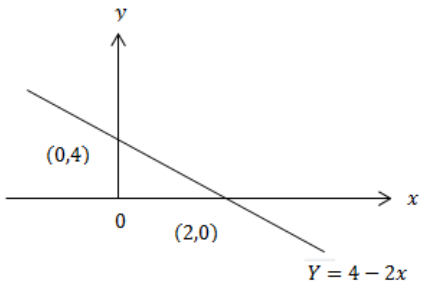
Gambar:



2. $Y = 4 - 2x$

Dua buah titik yang dibutuhkan untuk menggambarkannya (0,4) dan (2,0)

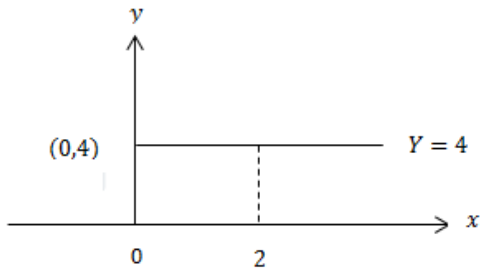
Gambar:



3. $Y = 4$

Dua buah titik yang dibutuhkan untuk menggambarkannya (0,4) dan (2,4)

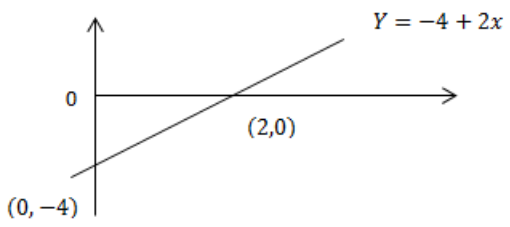
Gambar:



4. $Y = -4 + 2x$

Dua buah titik yang dibutuhkan untuk menggambarkannya (0,-4) dan (2,0)

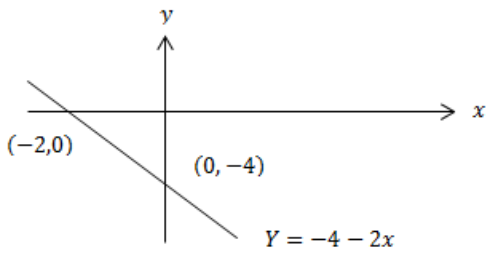
Gambar:



5. $Y = -4 - 2x$

Dua buah titik yang dibutuhkan untuk menggambarkannya (0,-4) dan (-2,0)

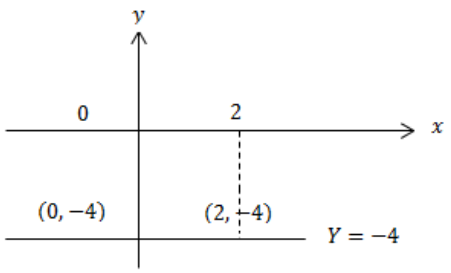
Gambar:



6. $Y = -4$

Dua buah titik yang dibutuhkan untuk menggambarkannya (0,-4) dan (2,-4)

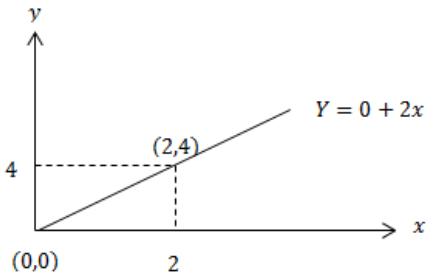
Gambar:



7. $Y = 0 + 2x$

Dua buah titik yang dibutuhkan untuk menggambarkannya (0,0) dan (2,4)

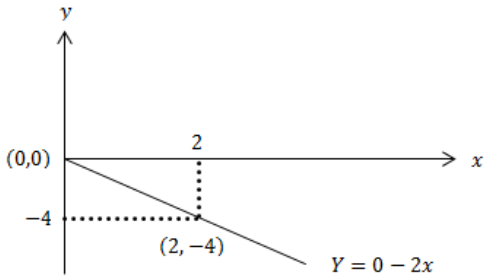
Gambar:



8. $Y = 0 - 2x$

Dua buah titik yang dibutuhkan untuk menggambarkannya (0,0) dan (2,-4)

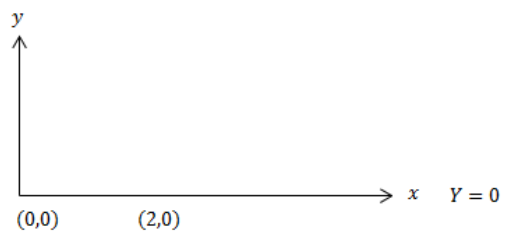
Gambar:



9. $Y = 0$

Dua buah titik yang dibutuhkan untuk menggambarkannya (0,0) dan (2,0)

Gambar:



Kesimpulan

Untuk fungsi linear $Y = a_0 + a_i\, x$ a_0: intersep

a_1: gradien/kemiringan

Intersep a_0 merupakan titik potong antara fungsi linear dengan sumbu y

- Jika a_0 positif maka perpotongan fungsi linear dengan sumbu y di atas sumbu datar x
- Jika a_0 negatif maka perpotongan fungsi linear dengan sumbu y di bawah sumbu datar x
- Jika a_0 nol maka perpotongan antara fungsi linear dengan sumbu y pada titik (0,0)

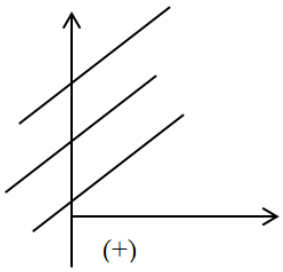
2.3 Kemiringan Dan Titik Potong Sumbu

Kemiringan (slope) dari fungsi linear dengan satu variabel bebas x adalah sama dengan perubahan variabel terikat (dependent) dibagi dengan perubahan dalam variabel bebas (independent). Dan biasanya dilambangkan dengan huruf m.

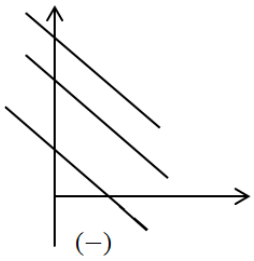
$$\text{Kemiringan} = m = \frac{\Delta y}{\Delta x}\ atau\ \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Gradien a_1 merupakan kemiringan fungsi linear terhadap sumbu x

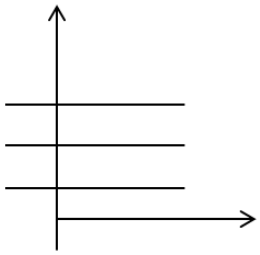
- Jika a_1 positif maka fungsi linear digambarkan garis dari kiri bawah ke kanan atas.



- Jika a_1 negatif maka fungsi linear digambarkan garis dari kiri atas ke kanan bawah.



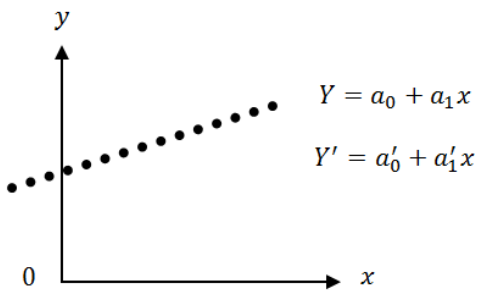
- Jika a_1 nol maka fungsi linear digambarkan garis yang sejajar dengan sumbu datar x



2.4 Hubungan Dua Garis Lurus

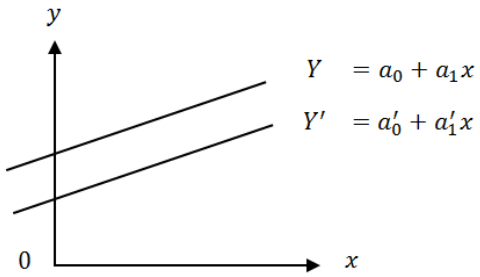
Ada dua fungsi linear di mana fungsi linear pertama yaitu: $Y = a_0 + a_1 x$ dan fungsi linear yang kedua yaitu: $Y' = a_0' + a_1'\, x$. Kedua fungsi linear tersebut berada dalam berbagai keadaan:

A. Berhimpit



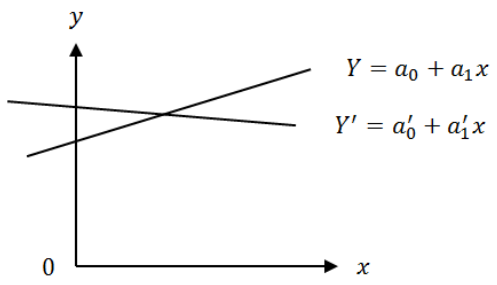
Karena berhimpit, maka $a_0 = a_0'$ dan $a_1 = a_1'$

B. Sejajar



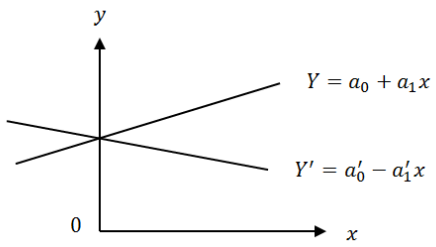
Karena sejajar, maka $a_0 = a_0'$ dan $a_1 = a_1'$

C. Berpotongan



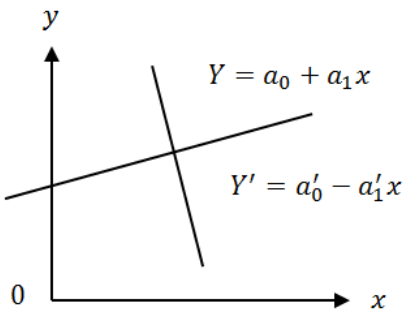
Karena berpotongan, maka $a_1 = a_1'$. Untuk kondisi seperti pada gambar $a_0 = a_0'$.

D. Berpotongan



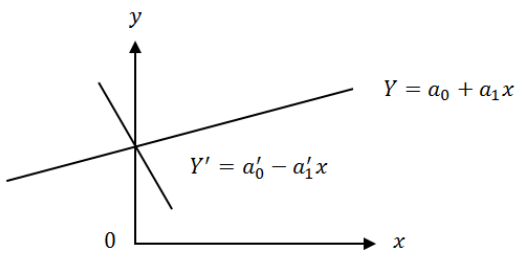
Karena berpotongan, maka $a_1 = a_1'$. Untuk kondisi seperti pada gambar $a_0 = a_0'$ dan perpotongan pada titik $(0, a_0)$

E. Berpotongan Tegak Lurus



Karena berpotongan tegak lurus, maka $a_1 = a_1'$ dan $a_1 \cdot a_1' = -1$. Untuk kondisi seperti pada gambar $a_0 = a_0'$

F. Berpotongan Tegak Lurus



Karena berpotongan tegak lurus, $a_1 = a_1'$ dan $a_1 \cdot a_1' = -1$. Untuk kondisi seperti pada gambar $a_0 = a_0'$ dan berpotongan pada titik $(0, a)$

2.5 Koordinat Titik Potong 2 Fungsi

Untuk fungsi linear yang saling berpotongan, maka untuk mencari titik potongnya dapat dilakukan dengan cara:

1. Substitusi
2. Eliminasi
3. Determinan

<u>Contoh:</u>

Carilah titik potong dari dua garis berpotongan yaitu $2x + 3y = 4$ dan $x + 2y = 1$

Jawab:

1. Cara Substitusi

$2x + 3y = 4 \qquad \cdots\cdots\cdots *$

$x + 2y = 1 \quad \rightarrow x = 1 - 2y \quad \cdots\cdots\cdots **$

Memasukkan $**$ pada $*$

$2x + 3y = 4$

$2(1 - 2y) + 3y = 4$ maka $x = 1 - 2y$

$2(1) - 2(2y) + 3y = 4$ $\quad x = 1 - 2(-2)$

$2 - 4y + 3y = 4$ $\quad x = 1 - (-4)$

$2 - y = 4$ $\quad x = 1 + 4$

$-y = 4 - 2$ $\quad x = 5$

$-y = 2$

$y = 2$

2. Cara Eliminasi

$2x + 3y = 4\ (x1) \quad \rightarrow 2x + 3y = 4$ maka $x + 2y = 1$

$x + 2y = 1\ (x2) \quad \rightarrow 2x + 4y = 2$ $\quad x + 2(-2) = 1$

$-y = 2$ $\quad x + (-4) = 1$

$y = -2$ $\quad x - 4 = 1$

$x = 1 + 4$

$x = 5$

3. Cara Determinan

$2x + 3y = 4$

$x + 2y = 1$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{(4)(2)-(1)(3)}{(2)(2)-(1)(3)} = \frac{8-3}{4-3} = \frac{5}{1} = 5$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{(2)(1)-(1)(4)}{(2)(2)-(1)(3)} = \frac{2-4}{4-3} = \frac{-2}{1} = -2$$

Baik dengan cara eliminasi, substitusi, ataupun determinasi, pasti akan diperoleh nilai yang sama.

2.6 Menentukan Persamaan Garis

A. Metode Dua Titik

Suatu garis lurus dapat digambarkan dengan cara menghubungkan dua titik pada bidang Cartesius XY. Tetapi, persamaan garis lurus tersebut tidak dapat diketahui apabila kita tidak mengetahui letak dari dua titik tersebut dalam bidang Cartesius XY. Oleh karena itu, untuk menentukan persamaan garis lurus tersebut, kita harus mengetahui kedua titik tersebut.

Jika kedua titik diketahui, misalnya B$(x_1, y_{1)}$ dan C (x_2, y_2), maka kemiringan garisnya dapat diperoleh dengan cara membagi perubahan dalam Y dengan perubahan dalam X, atau kemiringan garis $= \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$. Apabila ada titik lain misalnya A (X,Y) yang terletak pada garis tersebut, maka dapat dinyatakan menjadi, kemiringan garis = $\frac{Y - Y_1}{X - X_1}$. Karena kemiringan garis lurus adalah sama pada setiap titik yang terletak pada garis tersebut, maka dapat kita nyatakan rumus berikut:

$$\frac{Y-Y_1}{Y_2-Y_1} = \frac{X-X_1}{X_2-X_1}$$

1. Jika diketahui dua buah titik yaitu $A(x_1 y_1)$ dan $B(x_2 y_2)$

   Contoh: Carilah garis yang melalui titik (3,2) dan (4,6)

   Jawab:

   Misalkan $(x_1, y_1) = (3,2)$dan $(x_2, y_2) = (4,6)$

   maka: $\frac{y-2}{6-2} = \frac{x-3}{4-3}$

   $$\frac{y-2}{4} = \frac{x-3}{1}$$

   $$y - 2 = 4(x - 3)$$

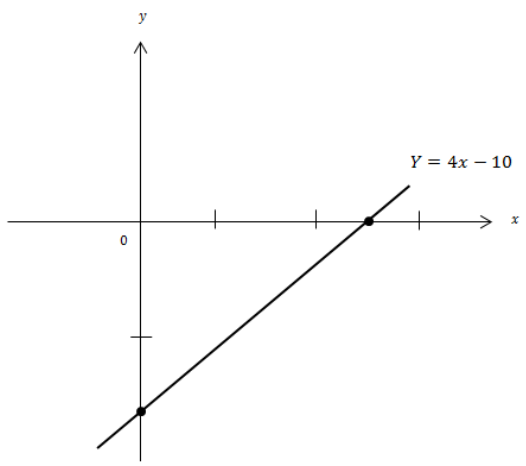
   $$y - 2 = 4x - 12$$

   $$y \quad = 4x - 12 + 2$$

   $$y \quad = 4x - 10$$

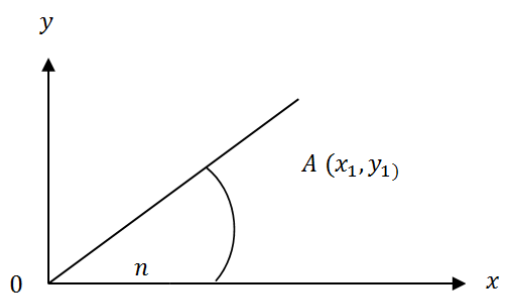
Jadi garis yang melalui titik (3,2) dan (4,6) adalah $Y = 4x - 10$

Gambar:



B. Metode Satu Titik dan Satu Kemiringan

Selain metode dua titik untuk menentukan persamaan garis lurus, ada metode lain, yaitu: metode satu titik dan satu kemiringan.



Untuk mengetahui garis yang tepat melalui titik tersebut dengan kecondongan tertentu dapat diperoleh dengan menggunakan rumus di bawah ini:

$$Y - Y_1 = m(x - x_1), \quad m = \Delta Y / \Delta x$$

2. Jika diketahui sebuah titik $A(x_1 y_1)$ dan gradien/kemiringannya m

Contoh: Carilah garis yang melalui titik (6,4) dengan kecondongan sebesar $-\frac{2}{3}$

Jawab: misalkan $(x_1, y_1) = (3,3)$ dan $m = 5$

maka: $Y - Y_1 = m(x - x_1)$

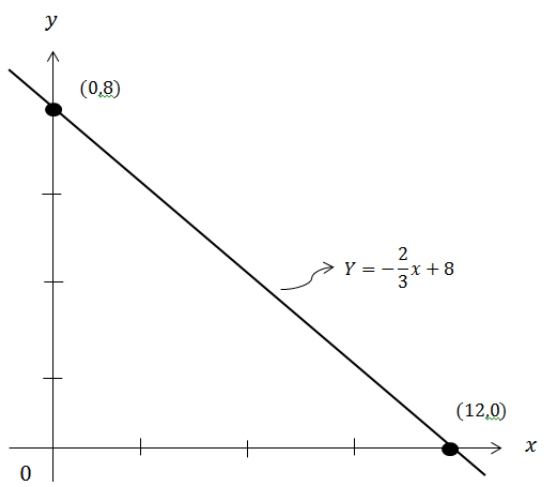
$$Y - 4 = -2/3(x - 6)$$

$$Y = -\frac{2}{3}x + 4 + 4$$

$$Y = -\frac{2}{3}x + 8$$

Jadi garis yang melalui titik (3,3) dengan kemiringannya 5 adalah $Y = -\frac{2}{3}x + 8$

Gambar:



2.7 Latihan Soal

1. Ada dua fungsi linear yaitu: $Y = 2x - 1$ dan $Y = -\frac{1}{2}x + 7$

   Apa yang tampak jika digambarkan pada sebuah grafik?

   Jawab:

   Untuk $Y = 2x - 1$, intersepnya $(a_0) = -1$ dan gradiennya $(a_1) = +2$

Untuk $Y = -\frac{1}{2}x + 7$, intersepnya $(a_0) = +7$ dan gradiennya $(a_1) = -\frac{1}{2}$

Perkalian antargradiennya $(+2) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$, maka kedua fungsi linear tersebut berpotongan saling tegak lurus.

2. Carilah garis yang melalui titik (4,8) dengan kemiringannya sebesar 12.

   Jawab:

   misalkan $(x_1, y_1) = (4,8)$ dan $m = 12$

   maka:

   $Y - Y_1 = m(x - x_1)$

   $Y - 8 = 12(x - 4)$

   $Y - 8 = 12x - (12)(4)$

   $Y - 8 = 12x - 48$

   $Y = 12x - 48 + 8$

   $Y = 12x - 40$

   Jadi garis yang melalui titik (4,8) dengan kemiringannya 12 adalah $Y = 12x - 40$

BAB III

APLIKASI FUNGSI LINEAR DALAM EKONOMI

3.1 Fungsi Permintaan, Fungsi Penawaran dan Keseimbangan Pasar

A. Fungsi Permintaan

Dalam fungsi permintaan antara produk yang diminta dengan harga produk per unit akan selalu menunjukkan besaran yang berlawanan. Sesuai dengan hukum permintaan yang berbunyi "jika harga produk per unit naik, maka jumlah permintaan jumlah produk akan semakin berkurang dan sebaliknya jika harga produk per unit turun, maka jumlah permintaan produk akan semakin bertambah." Hal ini akan tampak pada rumus persamaan fungsi permintaan yaitu:

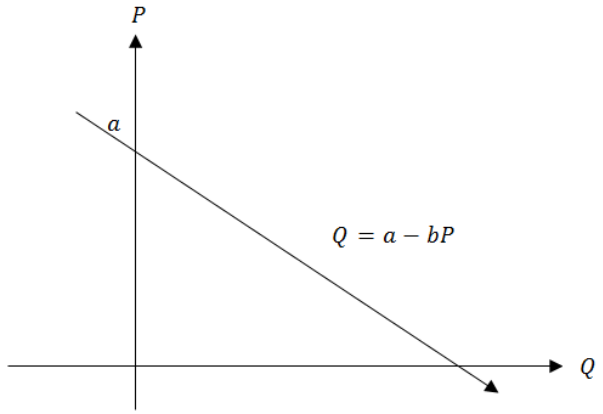
$$\mathbf{Q = a - bP}$$

Di mana:

Q = jumlah produk yang diminta

P = harga beli produk per unit

Jika persamaan fungsi permintaan digambarkan ke dalam bentuk grafik, maka didapatkan arah garis bergerak dari kiri atas ke kanan bawah sesuai dengan nilai b (*slope*) yang negatif.



Tingkat kemiringan garis tergantung dari besar kecilnya nilai gradien atau koefisien arah garis. Gradien suatu garis semakin besar, garis dari persamaan fungsi permintaan semakin mendekati atau sejajar dengan sumbu vertikal; atau sumbu harga (P) dan sebaliknya jika gradien suatu garis semakin kecil atau mendekati nol, maka garis akan sejajar dengan sumbu horizontal atau Q.

Contoh:

Diketahui fungsi persamaan: Q= 60 – 2P, tentukan:

a. Berapa jumlah produk yang diminta, jika harga produk per unit Rp 25, Rp 30, dan Rp 50?
b. Berapa harga produk per unit, jika jumlah produk yang diminta sebanyak 5 unit, 10 unit, dan 20 unit?
c. Berapa harga tertinggi yang harus dibayar untuk sebuah produk tersebut?
d. Berapa banyak permintaan produk tertinggi?
e. Gambarkan grafik dari persamaan fungsi permintaan di atas!

Penyelesaian:

a. Saat harga produk per unit Rp 25, maka Q= 60 – 2(25) = 10 unit
   Saat harga produk per unit Rp 30, maka Q= 60 – 2(30) = 0 unit

Saat harga produk per unit Rp 50, maka Q= 60 – 2(50) = -40 unit

b. Saat jumlah produk yang diminta 5 unit, maka:

5 = 60 – 2P

2P = 60 – 5

2P = 55

P = $\frac{55}{2}$ = 27,5 atau Rp 27,5

Saat jumlah produk yang diminta 10 unit, maka:

10 = 60 – 2P

2P = 60 – 10

2P = 50

P = $\frac{50}{2} = 25$ atau Rp 25,-

Saat jumlah produk yang diminta 20 unit, maka:

20 = 60 – 2P

2P = 60 – 20

2P = 40

P = $\frac{40}{2}$ = 20 atau Rp 20,-

c. Dengan asumsi pembeli tidak mampu membeli, sehingga tidak ada produk yang dibeli atau Q= 0

Q = 60 – 2P

0 = 60 – 2P

2P = 60

P = $\frac{60}{2}$ = 30 atau Rp 30,-

d. Dengan asumsi pembelian produk secara gratis berarti P= 0

Q = 60 – 2P

Q = 60 – 2(0)

Q = 60 unit

e. Gambar grafik persamaan fungsi permintaan Q= 60 – 2P. Sebelumnya di cari nilai Q dan P, jika masing-masing di-nol-kan.

Jika Q= 0, didapatkan:

0 = 60 – 2P

2P = 60

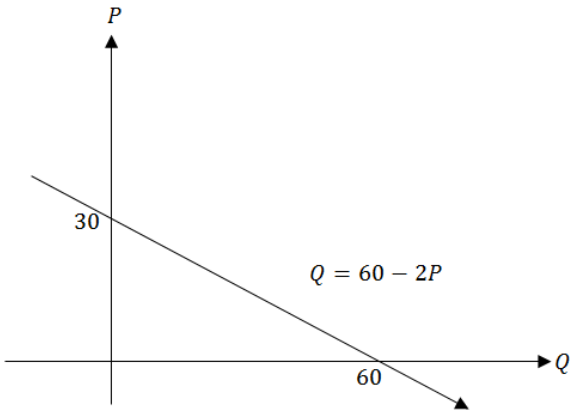
P = $\frac{60}{2}$ = 30

Jika P= 0, didapatkan:

Q = 60 – 2P

Q = 60 – 2(0)

Q = 60



B. Fungsi Penawaran

Kebalikan dari fungsi permintaan, pada fungsi penawaran antara kuantitas dan harga produk per unit akan bergerak searah. Hal ini sesuai dengan hukum penawaran yang berbunyi, “Jika harga produk per unit

semakin meningkat, maka jumlah produk yang ditawarkan kepada pembeli akan semakin banyak dan jika harga produk per unit semakin menurun, jumlah produk yang ditawarkan semakin sedikit". Sehingga pengaruhnya mereka akan cenderung mengurangi kuantitas produk yang dijual.

Rumus persamaan fungsi penawaran (supply function) sebagai berikut:

$$\mathbf{Q = -a + bP}$$

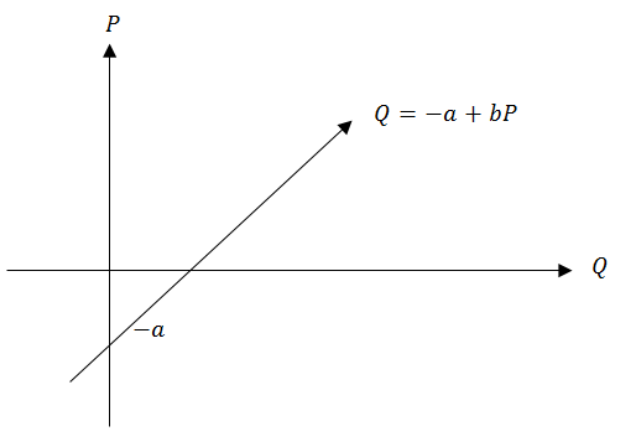
Keterangan:

Q = jumlah produk yang ditawarkan

a = jumlah produk minimum yang ditawarkan di saat P = 0

b = jumlah produk yang ditawarkan yang dipengaruhi oleh harga produk

P = harga produk per unit



Contoh:

Kurva penawaran suatu produk dinyatakan P = 20 + 4Q, tentukan:

a. Berapa harga produk, jika jumlah produk yang ditawarkan 10 unit dan 20 unit?
b. Berapa jumlah produk yang ditawarkan jika harga produk per unit Rp 10,- dan Rp 8,- ?
c. Gambarkan kurva atau grafik fungsi penawaran di atas

Penyelesaian:

a. Jika jumlah produk yang ditawarkan 10 unit.

P = 20 + 4(10)

P = 20 + 40

P = 60 atau Rp 60,-

Jika jumlah produk yang ditawarkan 20 unit.

P = 20 + 4(20)

P = 20 + 80

P = 100 atau Rp 100,-

b. Jika harga produk per unit yang ditawarkan Rp 8,-

8 = 20 + 4Q

4Q = 8 – 20

4Q = -12

Q = $-\frac{12}{4}$ = -3 unit

Jika harga produk per unit yang ditawarkan Rp 10,-

10 = 20 + 4Q

4Q = 10 – 20

Q = $-\frac{10}{4}$ = -2,5 unit

c. Kurva penawaran dapat digambarkan dengan cara sebagai berikut:

Jika P = 0, didapatkan:

= 20 + 4Q

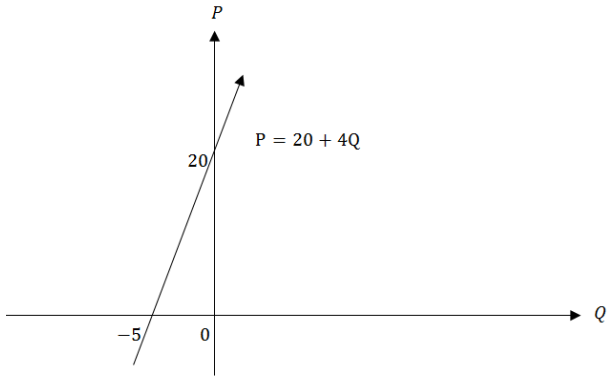
4Q = -20

Q = $-\frac{20}{4}$ = -5 unit

Jika Q = 0, didapatkan:

P = 20 + 4(0)

P = 20



C. Keseimbangan Pasar

Keseimbangan pasar (*equilibrium market*) akan tercapai jika jumlah produk yang diminta sama dengan jumlah produk yang ditawarkan atau harga produk yang ditawarkan sama dengan harga produk yang diminta pembeli. Rumus keseimbangan pasar sebagai berikut:

$\mathbf{Qd = Qs}$ atau $\mathbf{Pd = Ps}$

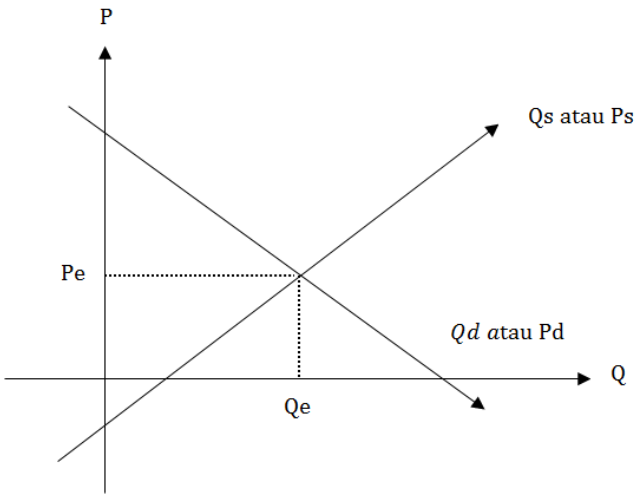
Keterangan:

Qd = jumlah permintaan produk

Qs = jumlah penawaran produk

Pd = harga beli produk per unit

Ps = harga jual produk per unit



Contoh:

Diketahui persamaan fungsi permintaan dan fungsi penawaran sebagai berikut: $\mathrm{P} = 20 - \mathrm{Q}$ dan $\mathrm{P} = 5 + 2\mathrm{Q}$, tentukan jumlah dan harga produk keseimbangan pasar yang disepakati oleh penjual dan pembeli dan gambarkan dalam grafik keseimbangan pasar tersebut!

Penyelesaian:

Menentukan jumlah dan harga produk keseimbangan pasar dengan rumus:

$\mathrm{Qd} = \mathrm{Qs}$

Fungsi permintaan: $\mathrm{P} = 20 - \mathrm{Q}$ diubah jadi $\mathrm{Qd} = 20 - \mathrm{P}$

Fungsi penawaran: $\mathrm{P} = 5 + 2\mathrm{Q}$ diubah jadi $\mathrm{Qs} = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{P}$

Sehingga:

Qd	=	Qs
20 – P	=	$-\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{P}$
$-\mathrm{P} - \frac{1}{2}\mathrm{P}$	=	$-\frac{5}{2} - 20$
$-\frac{3}{2}P$	=	-22,5
Pe	=	$\frac{-22,5}{-1,3}$
Pe	=	15

Dengan menggunakan salah satu persamaan fungsi di atas, kita dapat menentukan jumlah keseimbangan pasar:

Qe = 20 – P

Qe = 20 – 15

Qe = 5

Jika digambarkan ke dalam grafik keseimbangan pasar dapat dilakukan dengan langkah berikut:

Grafik fungsi permintaan: P= 20 – Q

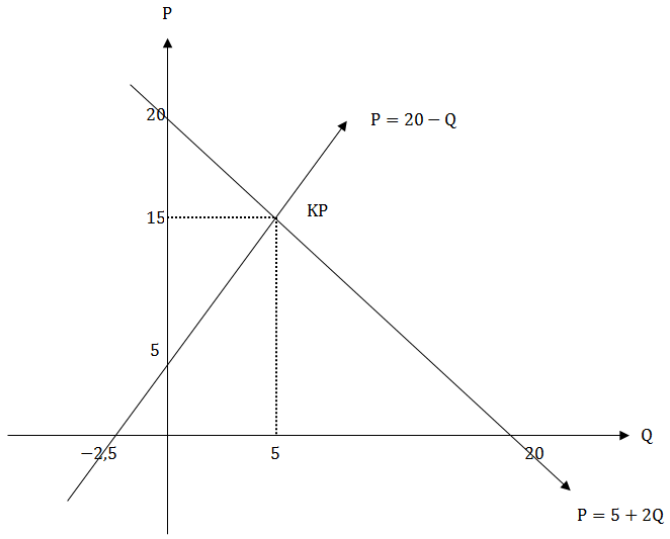
Jika Q = 0 maka didapatkan P = 20

Jika P = 0 maka didapatkan Q = 20

Grafik fungsi penawaran: P= 5 + 2Q

Jika Q = 0 maka didapatkan P = 5

Jika P = 0 maka didapatkan Q = $-\frac{5}{2}$ = -2,5



3.2 Efek Pajak dan Subsidi Pada Keseimbangan Pasar

A. Pajak

Pajak menyebabkan beban penawaran akan lebih mahal dan produsen pada umumnya mengalihkan beban pajak kepada pembeli atau konsumen.

Rumus fungsi permintaan dan fungsi penawaran sebelum pajak:

$\mathbf{Qd = a - bP}$ dan $\mathbf{Qs = -a + bP}$

Rumus fungsi permintaan dan fungsi penawaran sesudah pajak:

$\mathbf{Qd = a - bP}$ dan $\mathbf{Qs = -a + bP - t}$

Di mana: t = beban pajak produk per unit.

a. Beban pajak produk per unit yang harus dibayar oleh konsumen sebesar:

   tk = Pt – Pe

b. Total beban pajak produk yang harus dibayar oleh konsumen atas pembelian sejumlah produk sebesar:

   TK = tk (Qe')

c. Beban pajak produk per unit yang harus dibayar oleh produsen sebesar:

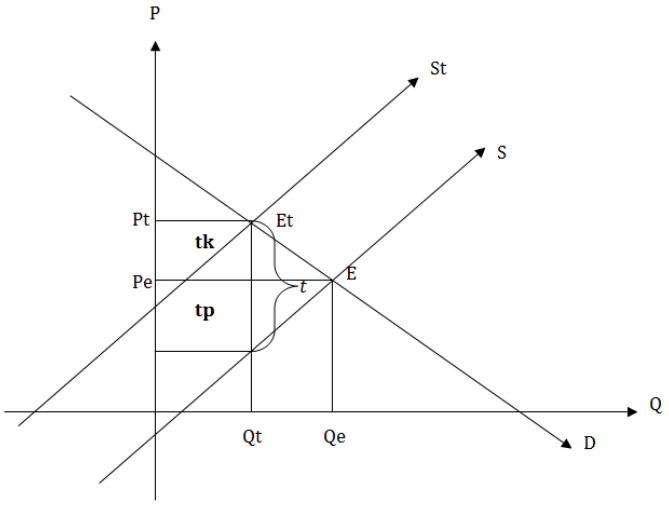
   tp = t – tk

d. Total beban pajak produk yang harus dibayar oleh produsen atas penawaran sejumlah produk sebesar:

   TP = tp (Qe')

e. Total pajak yang diterima pemerintah sebesar:

   T = t (Qe') atau **T = TK + TP**



Contoh:

Misalkan kita menggunakan persamaan fungsi permintaan dan penawaran di atas yaitu: P= 20 – Q dan P= 5 + 2Q dengan beban pajak produk per unit sebesar Rp 2,- tentukan:

a. Harga dan jumlah keseimbangan pasar sebelum pajak
b. Harga dan jumlah keseimbangan pasar sesudah pajak
c. Besar pajak per unit dan total pajak yang harus dibayar oleh konsumen dan produsen kepada pemerintah
d. Total pajak yang diterima oleh pemerintah
e. Gambar kurva atau grafik keseimbangan pasar sebelum dan sesudah pajak

Penyelesaian:

a. Pada bagian keseimbangan pasar sudah dihitung dengan hasil Pe= 15 dan Qe= 5
b. Harga dan jumlah keseimbangan pasar sesudah pajak (t= Rp 2,-)

   Fungsi permintaan: P = 20 – Q

   Fungsi penawaran: P = 5 + 2Q + 2 = 7 + 2Q

   Sesuai dengan rumus keseimbangan pasar yaitu Pd = Ps

Pd = Ps

20 – Q = 7 + 2Q

20 – 7 = Q + 2Q

13 = 3Q

Q = Qt = $\frac{13}{3}$ = $4\frac{1}{3}$

Dengan mengunakan salah satu persamaan fungsi di atas, kita hitung harga sesudah pajak:

Pt = $20 - 4\frac{1}{3} = 15\frac{2}{3}$

c. Besar pajak per unit dan total pajak yang harus dibayar oleh konsumen

tk = Pt – Pe

= $15\frac{2}{3} - 15 = \frac{2}{3}$

Tk = tk (Qe')

= $\frac{2}{3} \cdot 4\frac{1}{3} = 2\frac{8}{9}$

Besar pajak per unit dan total pajak yang harus dibayar oleh produsen

tp = t – tk

= $2 - \frac{2}{3}$ = $1\frac{1}{3}$

Tp = tp (Qe')

= $1\frac{1}{3} \cdot 4\frac{1}{3} = 5\frac{7}{9}$

d. Total pajak yang diterima oleh pemerintah

T = t (Qe')

= $2 \cdot 4\frac{1}{3} = 8\frac{2}{3}$ atau

T = TK + TP

= $2\frac{8}{9} + 5\frac{7}{9} = 8\frac{6}{9} = 8\frac{2}{3}$

e. Gambar kurva atau grafik keseimbangan pasar sebelum dan sesudah pajak

· Grafik keseimbangan pasar sebelum pajak

Dari perhitungan pada keseimbangan pasar terdahulu grafik fungsi permintaan diketahui (0, 20) dan (2, 0). Grafik fungsi penawaran diketahui (0, -2,5) dan (5, 0)

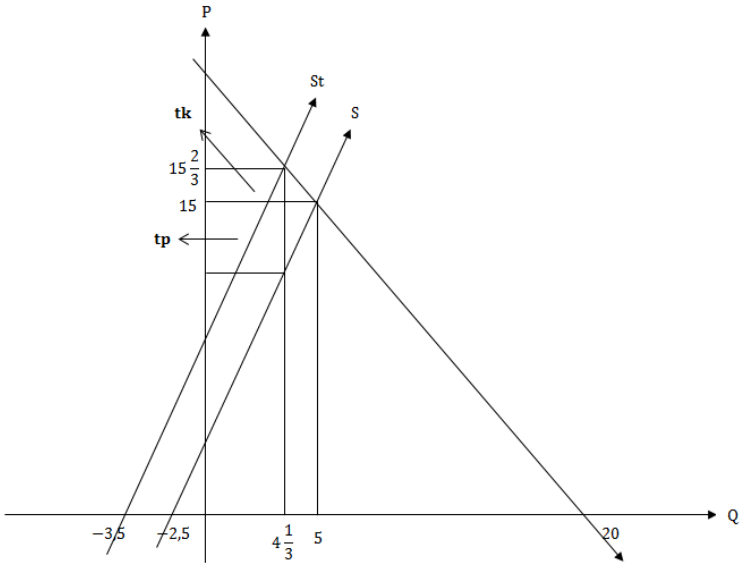
- Grafik keseimbangan pasar sesudah pajak

Persamaan fungsi permintaan tidak mengalami perubahan sehingga grafiknya juga tidak berubah. Sedangkan yang mengalami perubahan dengan adanya pajak yang dibebankan oleh pemerintah kepada produsen adalah persamaan fungsi penawaran sehingga didapatkan rumus sebagai berikut:

P = 7 + 2Q

Saat P = 0, maka Q = $-\frac{7}{2}$ = -3,5 koordinatnya (0, -3,5)

Saat Q = 0, maka P = 7 koordinatnya (7, 0)



B. Subsidi

Subsidi memberikan pengaruh harga jual produk per unit yang ditawarkan relatif lebih murah atau rendah daripada sebelum ada subsidi dari pemerintah. Hal ini merupakan kebalikan dari jumlah keseimbangan pasar yang karena adanya subsidi justru akan semakin meningkat.

Prosedur perhitungan dan kejadiannya sama dengan fungsi pajak, di mana fungsi penawaran sesudah ada subsidi, baru mengalami perubahan persamaan fungsinya, sedangkan persamaan fungsi permintaan adalah tetap.

Rumus fungsi permintaan dan fungsi penawaran sebelum ada subsidi:

Q = a – bP dan **Q = -a + bP**

Rumus fungsi permintaan dan fungsi penawaran sesudah ada subsidi:

Q = a – bP dan **Q = -a + bP + s**

a. Besar subsidi produk per unit yang diterima konsumen:

   sk = Pe – Ps

   di mana Ps= harga keseimbangan pasar sesudah ada subsidi

b. Total subsidi produk yang diterima konsumen:

   SK = sk (Qe')

c. Besar subsidi produk per unit yang diterima produsen:

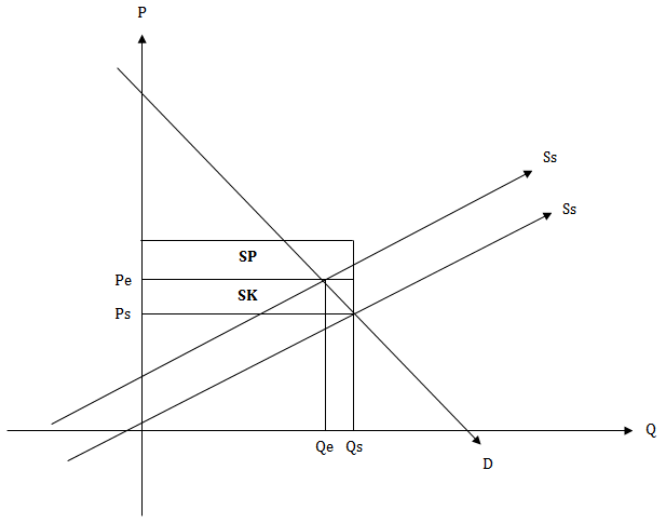
   sp = s – sk

d. Total subsidi produk yang ditawarkan produsen:

   SP = sp (Qe')

e. Total subsidi yang diberikan oleh pemerintah:

   S = s (Qe') atau **S = SK + SP**



Contoh:

Persamaan fungsi permintaan P= 20 – Q dan fungsi penawaran P= 5 + 2Q dan oleh pemerintah diberi subsidi (s) setiap produk per unit yang dibeli konsumen sebesar Rp 2,- tentukan:

a. Harga dan kuantitas keseimbangan pasar sebelum diberi subsidi
b. Harga dan kuantitas keseimbangan pasar sesudah diberi subsidi
c. Besar subsidi per unit dan total subsidi yang diterima konsumen maupun produsen
d. Total subsidi yang diberikan pemerintah setiap transaksi tersebut atas sejumlah produk yang diberi konsumen
e. Gambarkan grafik sebelum dan sesudah diberi subsidi

Penyelesaian:

a. Harga dan kuantitas keseimbangan pasar sebelum diberi pemerintah, keadaannya sama seperti perhitungan pada pajak di atas yaitu Pe = 15 dan Qe = 5
b. Harga dan kuantitas keseimbangan pasar sesudah ada subsidi setiap produk Rp 2,- maka diperoleh sebagai berikut:

Fungsi permintaan: P= 20 – Q

Fungsi penawaran: P= 5 + 2Q – 2 = 3 + 2Q

Sesuai dengan rumus keseimbangan pasar yaitu Pd = Ps

Pd = Ps

20 – Q = 3 + 2Q

20 – 3 = Q + 2Q

17 = 3Q

Qs = $\frac{17}{3} = 5\frac{2}{3}$

Menentukan harga keseimbangan pasa sesudah subsidi (Ps):

Ps = 3 + 2 ($5\frac{2}{3}$)

Ps = 3 + $11\frac{2}{3}$

Ps = $14\frac{2}{3}$

c. Besar subsidi produk per unit dan total subsidi yang diterima konsumen:

sk = Pe – Ps

= 15 - $14\frac{2}{3}$

= $\frac{1}{3}$

SK = sk (Qe')

= $\frac{1}{3} \cdot 5\frac{2}{3} = \frac{17}{9} = 1\frac{8}{9}$

Besar subsidi produk per unit dan total subsidi yang diterima produsen:

sp = s – sk

= $2 - \frac{1}{3}$

= $1\frac{2}{3}$

SP = sp (Qe')

= $1\frac{2}{3} \cdot 5\frac{2}{3}$

= $\frac{85}{9} = 9\frac{4}{9}$

d. Total subsidi yang diberikan pemerintah atas sejumlah produk yang diberi:

S = s (Qe')

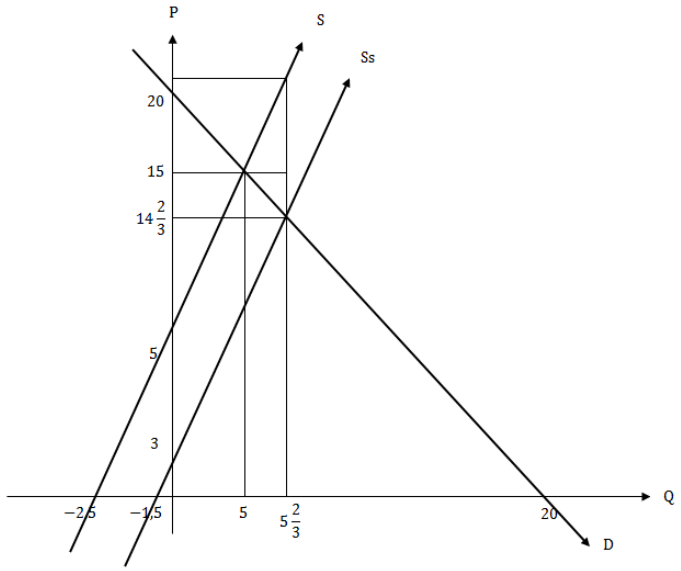
$= 2 \cdot 5\frac{2}{3} = 11\frac{1}{3}$

e. Gambar grafik keseimbangan pasar sebelum dan sesudah ada subsidi:

Kurva penawaran sesudah subsidi: P = 3 + 2Q

Saat Q = 0 maka P = 3

Saat P = 0 maka Q = $-\frac{3}{2}$



3.3 Fungsi Biaya, Fungsi Penerimaan dan Analisis Pulang Pokok (BEP)

A. Fungsi Biaya

Secara matematika biaya dibedakan menjadi dua yakni biaya tetap (fixed cost = FC) dan biaya variabel (variabel cost = VC). Biaya tetap adalah biaya yang harus atau tetap dikeluarkan walaupun tidak melakukan kegiatan, sedangkan biaya variabel adalah biaya yang dikeluarkan yang besarnya proporsional dengan kegiatan yang dilakukan. Berikut rumus fungsi biaya:

TC = FC + VC

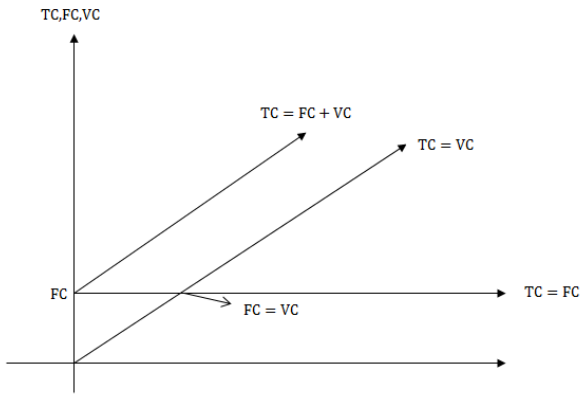
Keterangan:

TC = total cost

FC = fixed cost

VC = variable cost

Untuk biaya variabel (VC = $\frac{VC}{u} \cdot Q$) atau VC = bQ, sehingga jika digambarkan ke dalam grafik fungsi biaya sebagai berikut:



Contoh:

Seorang pengusaha bakso mempunyai empat orang karyawan dengan gaji tiap bulan per karyawan Rp 100.000 dengan biaya pengadaan bahan baku untuk pembuatan bakso setiap bulan rata-rata Rp 2.000.000. Setelah dihitung-hitung biaya bakso permangkok rata-rata Rp 600. Dengan data itu tentukan persamaan fungsi biaya pengusaha bakso tersebut!

Penyelesaian:

Biaya gaji 4 karyawan per bulan= Rp 100.000 x 4 = Rp 400.000

Biaya pengadaan bahan baku bakso rata-rata per bulan= Rp 2.000.000

Jadi biaya tetap perbulan + Rp 400.000,- + Rp 2.000.000,- = Rp 2.400.000,-

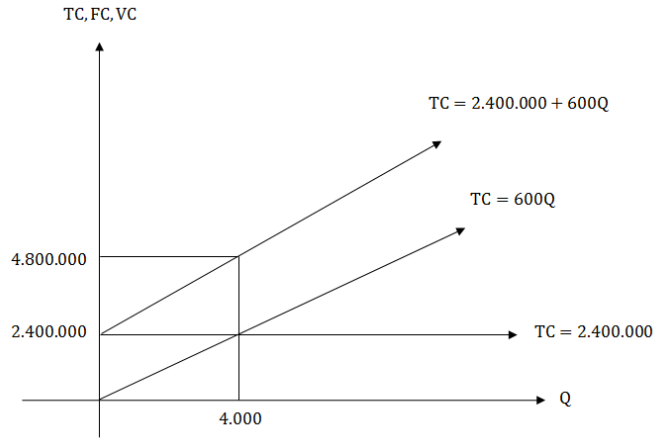
Biaya bakso permangkok rata-rata Rp 600.000,-

Sehingga persamaan fungsi biaya sebagai berikut:

TC = FC + VC

TC = 2.400.000 + 600 Q

Jika digambarkan dalam grafik fungsi biaya, yakni:



Pada saat FC = VC maka harus menjual bakso dengan ukuran biaya bakso rata-rata Rp 600,- sebanyak:

FC = VC

2.400.000 = 600Q

Q = $\frac{2.400.000}{600} = 4.000$ mangkok bakso

B. Fungsi Penerimaan

Seperti halnya fungsi biaya, fungsi penerimaan menunjukkan total penerimaan yang diperoleh dari aktivitas penjualan atas produk yang ditawarkan. Di sini besar kecilnya total penerimaan proporsional dengan kuantitas produk yang mampu terjual. Semakin banyak produk terjual semakin besar penerimaan, dengan sebaliknya, tentu saja dengan asumsi harga jual sama.. Rumus fungsi penerimaan sebagai berikut:

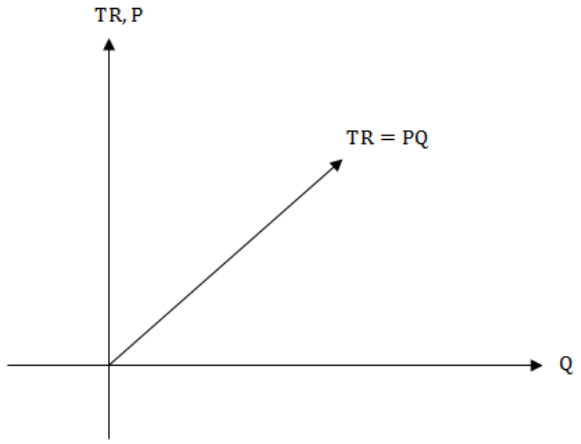
TR = PQ

Keterangan:

TR = total revenue (penerimaan total)

P = price (harga produk yang ditawarkan per unit)

Q = quantity (jumlah yang ditawarkan)



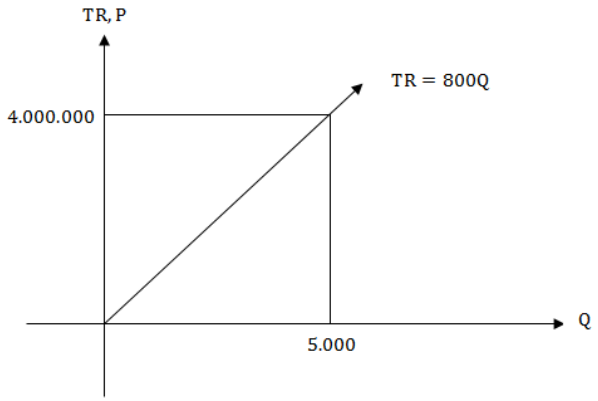
Contoh:

Dari contoh fungsi biaya, misalkan si penjual bakso setiap bulan rata-rata mampu menjual bakso sebanyak 5.000 mangkok dengan harga jual per mangkok Rp 800,- Dengan demikian:

TR = PQ

800 (5000) = Rp. 4.000.000,-

Bila digambarkan ke dalam grafik fungsi penerimaan sebagai berikut:

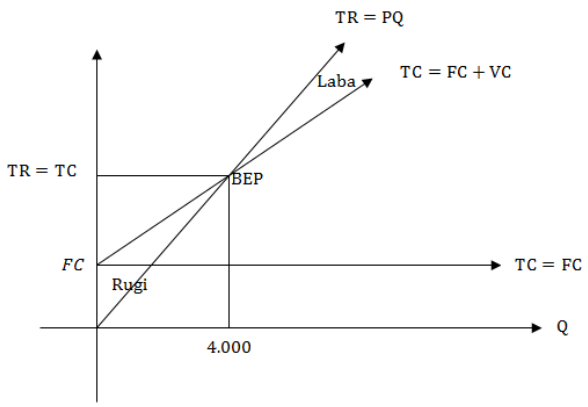


C. Fungsi Laba

Persamaan fungsi laba diperoleh dari persamaan fungsi biaya (TC) dan persamaan fungsi penerimaan (TR). Dikatakan laba jika penerimaan

total lebih besar dari biaya total (TR>TC), sebaliknya dikatakan rugi jika penerimaan total lebih kecil dari biaya total (TR<TC). Keadaan menjadi impas (break even point = BEP) jika antara penerimaan total (TR – TC). Rumus fungsi laba: **TR – TC**

BEP terjadi jika TR = TC karena laba = 0



Laba akan mencapai maksimum jika:

1. Turunan pertama fungsi laba = 0 atau $\pi' = 0$
2. Turunan kedua fungsi laba lebih besar dari nol (0) atau positif $(\pi' > 0)$

Laba akan mencapai minimum jika:

1. Turunan pertama fungsi laba = 0 atau $\pi' = 0$
2. Turunan kedua fungsi laba lebih besar dari nol (0) atau positif $((\pi' > 0)$

<u>*Contoh*</u>:

Contoh dari si penjual bakso di atas yaitu dengan biaya gaji 4 karyawan masing-masing Rp 100.000,- per bulan dan biaya bahan baku rata-rata per bulan Rp 2.000.000,- serta bakso per mangkok rata-rata Rp 600,-. Si penjual bakso kemudian menjual baksonya dengan harga jual per

mangkok Rp 800,-. Dalam keadaan seperti itu penjual bakso minimum harus mampu menjual berapa mangkok bakso agar tidak rugi serta berapa besar penerimaan total dan biaya total yang dicapai saat itu, gambar grafik masing-masing fungsi untuk menunjukkan keadaan tersebut

Penyelesaian:

Diketahui persamaan fungsi biaya, TC= 2.400.000 + 600Q

Diketahui persamaan fungsi penerimaan, TR= 800Q

Mencari terlebih dahulu penjualan minimum yang harus dicapai oleh si penjual bakso dengan cara BEP:

TR = TC

800Q = 2.400.000 + 600Q

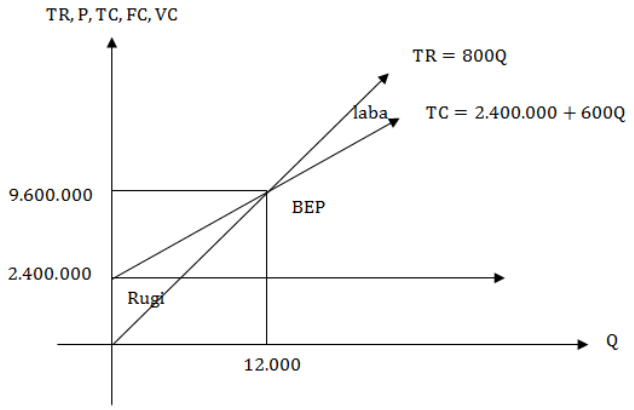
800Q – 600Q = 2.400.000

200Q = 2.400.000

Q = 12.000 mangkok

Selanjutnya menentukan besarnya penerimaan total dan biaya total:

TR	= 800Q	TC	= 2.400.000 + 600Q
TR	= 800 (12.000)		= 2.400.000 + 600 (12.000)
TR	= Rp 9.600.000		= 2.400.000 + 7.200.000
			= Rp 9.600.000



3.4 Fungsi Konsumsi dan Tabungan, serta Model Penentuan Pendapatan Nasional

A. Fungsi Konsumsi

Fungsi konsumsi adalah fungsi yang menunjukkan hubungan antara konsumsi dan pendapatan nasional. Co= *Autonomous comsumption* (konsumsi otonom) yaitu konsumsi yang besar kecilnya tidak dipengaruhi oleh tingkat pendapatan, sehingga mempunyai kecenderungan besarnya tetap.

c= koefisien pendapatan nasional (*Marginal Propensity to Consume*= MPC) $\mathrm{MPC} = \frac{\mathrm{dC}}{\mathrm{dY}}$ yaitu besarnya tambahan konsumsi sebagai akibat adanya tambahan pendapatan nasional. cY disebut pula konsumsi proporsional di mana besar kecilnya dipengaruhi tingkat pendapatan nasional, yang berarti semakin besar tingkat pendapatan nasional, semakin besar pula konsumsinya begitu juga dengan sebaliknya.

B. Fungsi Tabungan

Fungsi tabungan adalah fungsi yang menunjukkan hubungan antara tabungan dan pendapatan nasional.

S = So + sY

So= *autonomous to saving* (tabungan otonom) adalah besar tingkat tabungan yang tidak dipengaruhi oleh tingkat pendapatan nasional. s =

MPS (*Marginal Propensity to Saving* $= \frac{dS}{dY}$) yaitu besar tambahan tabungan sebagai akibat bertambahnya pendapatan nasional disebut pula tabungan proporsional. Karena rumus fungsi pendapatan nasional: **Y= C + S** sedangkan **C = Co + cY**, maka didapatkan rumus baru bagi fungsi tabungan sebagai berikut:

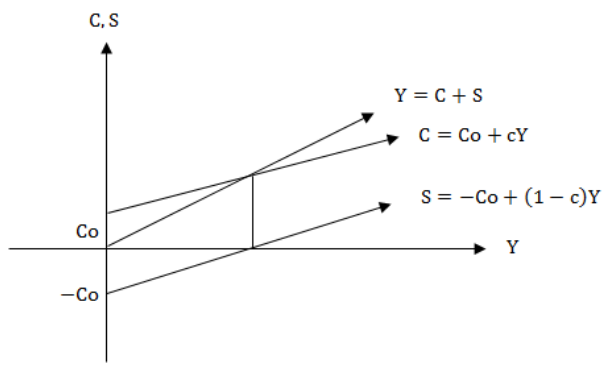
Y = C + S

Y = Co + cY + S

S = Y – Co – cY

S = -Co + (1-c) Y

Untuk **c= MPC** dan **s= MPS** sehingga dengan demikian: **s= 1 – c** atau **MPS = 1 – MPC** atau **MPC = 1 – MPS**. Jika keadaan ketiga fungsi di atas kita gambarkan ke dalam grafik dengan hasil sebagai berikut:



<u>*Contoh*</u>:

Suatu negara diketahui memiliki konsumsi otonominya sebesar Rp 300.000.000. *Marginal pronesity to save*-nya sebesar 0,45.

a. Buatlah fungsi konsumsi dan fungsi tabungannya.
b. Berapakah yang dikonsumsi dan yang ditabung jika pendapatan nasional 1 miliar?
c. Pada pendapatan nasional berapakah di mana tidak ada yang ditabung?

d. Gambarkan fungsi konsumsi, fungsi tabungan, dan fungsi pendapatan nasional pada sebuah grafik.

Penyelesaian:

a. Fungsi Konsumsi:

$C = C_0 + bY$

$C = 300.000.000 + (1 - 0{,}45)1.000.000$

$C = 300.000.000 + 0{,}55Y$

Fungsi Tabungan:

$S = -300.000.000 + 0{,}55Y$

b. Jika pendapatan nasionalnya 1 miliar:

Fungsi Konsumsi:

$C = 300.000.000 + 0{,}55\ (1.000.000.000)$

$C = 300.000.000 + 550.000.000$

$C = 850.000.000$

Fungsi Tabungan:

$S = -300.000.000 + 0{,}45\ (1.000.000.000)$

$S = -300.000.000 + 450.000.000$

$S = 150.000$

Jadi pada tingkat pendapatan nasional sebesar 1 miliar, maka Rp 850.000.000 dipergunakan untuk kebutuhan konsumsi dan Rp 150.000.000 untuk ditabung.

c. Tidak ada pendapatan yang ditabung, artinya S = 0

$Y = C + S$

$Y = C + 0$

$Y = C$

Tidak ada pendapatan yang ditabung maka berarti seluruh pendapatan habis dikonsumsi.

Tingkat pendapatan yang akan seluruhnya habis dikonsumsi yaitu:

$$Y = C_0 + bY$$

$$Y - bY = C_0$$

$$Y = \frac{1}{(1-b)} \cdot C_0$$

$$Y = \frac{1}{(1-055)} \cdot C_0$$

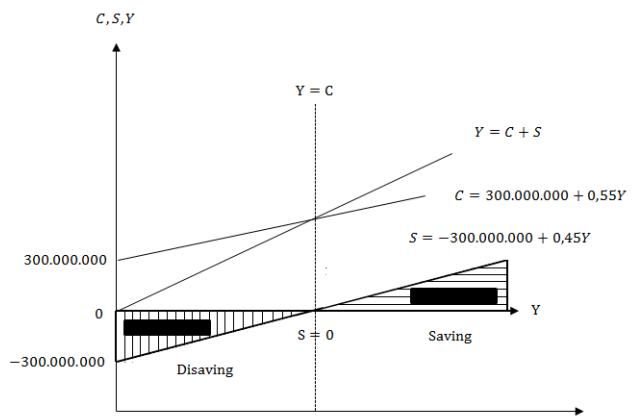
$$Y = \frac{1}{0{,}45} \cdot 300.000.000$$

$$Y = 2{,}22 \cdot 300.000.000$$

$$Y = 666.000.000$$

Jadi pada tingkat pendapatan sebesar 666.000.000 seluruh pendapatan dikonsumsi.

d. Gambarkan Fungsi Konsumsi, Fungsi Tabungan, dan Fungsi Pendapatan Nasional



Contoh:

Autonomous consumption suatu negara = 100, dengan MPS-nya = 0,4 dari pendapatan disposibel. Investasi nasionalnya = 40 dan *autonomous tax* = 50.

a. Carilah model pendapatan nasional?

<u>*Penyelesaian*</u>:

Diketahui :

$C_0 = 100 \qquad I_0 = 40 \qquad T_0 = 50$

$MPC = 1 - MPS$

$MPC = 1 - 0{,}4$

$MPC = 0{,}6$

a. Ada dua sektor yang terlibat, yaitu: sektor rumah tangga dan sektor pengusaha. Model pendapatan nasionalnya:

$Y = C + I$

dimana $C = C_0 + bYd$

$Yd = Y - T_0$

$I = I_0$

Sehingga,

$Y = C_0 + b(Y - T_0) + I_0$

$Y = C_0 + bY - bT_0 + I_0$

$Y - bY = C_0 - bT_0 + I_0$

$Y(1 - b) = C_0 - bT_0 + I_0$

$$Y = \frac{1}{(1-b)}(C_0 - bT_0 + I_0)$$

3.5 Latihan Soal

1. Berikan fungsi permintaan dan fungsi penawaran sebagai berikut:

   $Qd = 15 - P$ dan $Qs = 2P - 6$

   Kepada produsen itu, pemerintah mengenakan pajak dengan tarif pajak *t* = 3 unit

   - Carilah keseimbangan harga dan kuantitas di pasar sesudah ada pajak
   - Gambarkan perubahan akibat pajak tersebut
   - Berapa tarif pajak yang ditanggung konsumen
   - Berapa tarif pajak yang ditanggung produsen
   - Berapa total pajak yang diterima pemerintah
   - Berapa total pajak yang ditanggung konsumen
   - Berapa total pajak yang ditanggung produsen
   - Arsirlah total pajak masing-masing pada gambar di atas

   Jawab:

   Keseimbangan Harga (Pe) tercapai:

   $Qd = Qs$

   $15 - P = -6 + 2P$

   $15 + 6 = 2P + P$

   $21 = 3P$

   $Pe = 7$

   Jadi keseimbangan harga di pasar tercapai pada harga 7.

   Sehingga keseimbangan kuantitas (Qe) dapat dicari:

   $Qe = 15 - Pe$

   $Qe = 15 - 7$

   $Qe = 8$

Jadi keseimbangan kuantitas di pasar tercapai pada jumlah 8.

Untuk melihat perubahan akibat pajak maka baik fungsi permintaan maupun fungsi penawaran harus diubah terlebih dahulu.

Fungsi Permintaan: $Qd = 15 - P$ maka $P = 15 - Qd$

Fungsi Penawaran: $Qs = 2P - 6$ maka $2P = Qs + 6$

$$P = \frac{1}{2}Qs + 3$$

Akibat dikenakan pajak, maka

	Sebelum ada Pajak	Sesudah ada Pajak [tarif pajak (*t*)]
Fungsi Permintaan	$P = 15 - Qd$	$P = 15 - Qd$
Fungsi Penawaran	$P = \frac{1}{2}Qs + 3$	$P = \frac{1}{2}Qs + 3 + t$ $P = \frac{1}{2}Qs + 3 + 3$ $P = \frac{1}{2}Qs + 6$

Keseimbangan kuantitas (Qe') setelah pajak:

$$15 - Qe' = \frac{1}{2}Qe' + 6$$

$$15 - 6 = Qe' + \frac{1}{2}Qe'$$

$$9 = \frac{3}{2}Qe'$$

$$Qe' = 6$$

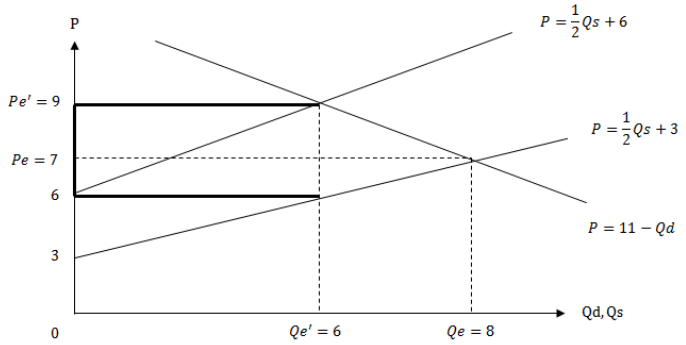
Jadi keseimbangan kuantitas setelah ada pajak di pasar tercapai pada jumlah 6. Sehingga keseimbangan harganya setelah ada pajak:

$$Pe' = 15 - Qe'$$

$$Pe' = 15 - 6$$

$$Pe' = 9$$

Jadi keseimbangan harganya setelah ada pajak di pasar tercapai pada harga 9. Grafiknya sebelum dan sesudah ada pajak digambarkan sebagai berikut:



Tarif pajak yang diberikan pemerintah: $t = 3$

Tarif pajak yang ditanggung konsumen: $tk = 9 - 7 = 2$

Tarif yang ditanggung produsen: $tp = 3 - 2 = 1$

Total pajak yang diterima pemerintah: $T = 3\ (6) = 18$

Total pajak yang ditanggung konsumen: $TK = 2\ (6) = 12$

Total pajak yang ditanggung produsen: $TP = 1\ (6) = 6$

BAB IV

FUNGSI KUADRAT

(PARABOLA)

Persamaan umum dari fungsi kuadrat: $Y = a + bX + cX^2$ dan merupakan fungsi non linear atau garis lengkung, di mana Y= variabel terikat, a= konstanta, dan nilai b, c merupakan koefisien arah garis, X= variabel bebas. Selanjutnya kita akan membahas satu per satu dari keempat kemungkinan gambar yang terbentuk dari fungsi kuadrat.

Fungsi kuadrat merupakan suatu fungsi non linear (garis tidak lurus) yang variabel bebas-nya berpangkat dua. Bentuk umum fungsi kuadrat:

- $y = f(x)$, yaitu: $Y = ax^2 + bx + c$

  dimana: $x =$ variabel bebas

  $y =$ variabel tidak bebas
- $x = f(y), yaitu: x = ay^2 + by + c$

  dimana: $x =$ variabel tidak bebas

  $y =$ variabel bebas

4.1 Jenis-Jenis Fungsi Kuadrat

A. Lingkaran

Lingkaran adalah tempat kedudukan titik-titik yang berjarak tetap terhadap sebuah titik tertentu (titik pusat). Rumus umum lingkaran mempunyai persyaratan bahwa a = b yaitu $aX^2 + bX^2 + cX + dY + e = 0$

Pusat lingkaran (i , j) di mana mencari nilai I dan j dapat dilakukan dengan rumus:

$$\text{i} = \frac{c}{-2a} \text{ dan } \text{j} = \frac{b^2 - 4ac}{-2a}$$

Rumus jari-jari lingkaran (r): $r = \sqrt{i^2 + j^2 - \frac{e}{a}}$

Sedangkan posisi gambar lingkaran terhadap sumbu X dan sumbu Y sebagai berikut:

- Jika i > r maka lingkaran tidak memotong sumbu vertikal (Y)
- Jika j > r maka lingkaran tidak memotong sumbu horizontal (X)

Namun demikian dari rumus umum lingkaran tersebut belum tentu semua dapat digambarkan bentuk lingkarannya, karena harus memenuhi kriteria sebagai berikut:

Jika $r^2 < 0$ maka bentuk lingkaran tidak nyata.

Jika $r^2 = 0$ maka bentuk lingkaran berupa titik.

Jika $r^2 > 0$ maka bentuk lingkaran dengan jari-jari tertentu.

Rumus dari $r^2 yaitu\, r^2 = (X - i)^2 + (Y - j)^2$. Guna mencari titik perpotongan di sumbu X dan Y memakai rumus abc yaitu:

$$X_{1,2} dan\, Y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

kedudukan titik-titik P(X,Y) yang jaraknya "r" sampai suatu titik M yang dinamakan pusat lingkaran adalah sama.

<u>*Contoh*</u>:

Tentukan titik pusat dan jari-jari dari persamaan lingkaran berikut:

$2x^2 + 2y^2 + 16x - 4y + 17 = 0$

<u>*Penyelesaian*</u>:

$(2x^2 + 16x) + (2y^2 - 4y) = -17$

$2(x^2 + 8x) + 2(y^2 - 2y) = -17$

$2(x^2 + 8x + h) + 2(y^2 - 2y + k) = -17 + h + k$

$2(x^2 + 8 + 16) + 2(y^2 - 2y + 1) = -17 + 32 + 2$

Persamaan diatas dibagi dengan 2 sehingga:

$(x^2 + 8x + 16) + (y^2 - 2y + 1) = \frac{17}{2}$

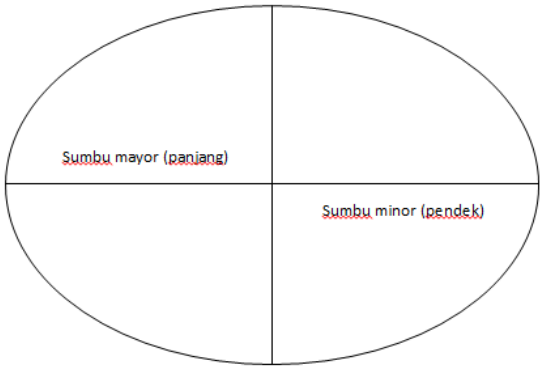
$(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = \frac{17}{2}$

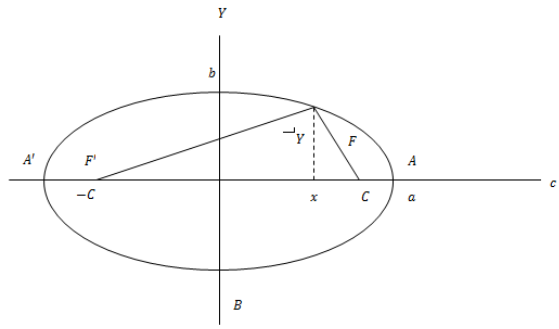
Titik pusat lingkaran: M (-4,1) dengan jari-jari lingkaran: $\frac{\sqrt{17}}{2}$

B. Elips

Elips adalah tempat kedudukan titik-titik yang jumlah jaraknya terhadap dua fokus selalu konstan. Dalam elips dikenal dengan dua sumbu, yaitu sumbu panjang disebut sumbu mayor dan sumbu pendek disebut sumbu minor. Rumus umum elips sama dengan rumus lingkaran tetapi dengan persyaratan a > b yaitu $aX^2 + bX^2 + cX + dY + e = 0$ dengan rumus baku:

$$\frac{(X - i)^2}{r_1^2} + \frac{(Y - j)^2}{r_2^2} = 1$$





Contoh:

Diketahui $9X^2 + 2Y^2 + 36X + 4Y + 20 = 0$, tentukan gambar elipsnya.

Penyelesaian:

1. Membuat persamaan baku dengan cara melakukan pemfaktoran dari masing-masing variabel.

$$(9X^2 + 36X) + (2Y^2 + 4Y) = -20$$

$$9(X+2)^2 + (Y+1)^2 = -20 + 36 + 2$$

$$9(X + 2)^2 + 2(Y+1)^2 = 18$$

$$\frac{9(X+2)^2}{18} + \frac{2(Y+1)^2}{18} = \frac{18}{18}$$

$$\frac{(X+2)^2}{2} + \frac{(Y+1)^2}{9} = 1$$

Dengan demikian titik pusat elips (I, j) sudah diketahui yakni I = -2 dan j = -1 dan jari-jari elips diambil dari $r_1^2 = 2$ dan $r_2^2 = 9$, kemudian diakarkan menjadi $r_1 = 1{,}414$ dan $r_2 = 3$. Berarti dari sini diketahui panjang sumbu minor = 2 x 1,414= 2,828 dan panjang sumbu mayor = 2 x 3= 6.

2. Menentukan titik perpotongan di sumbu X dan sumbu Y
   - Perpotongan di sumbu X di saat Y = 0 didapat persamaan $9X^2 + 36X + 20 = 0$

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$X_{1,2} = \frac{-36 \pm \sqrt{36^2 - 4(9)(20)}}{2(9)}$$

$$X_{1,2} = \frac{-36 \pm 24}{18}$$

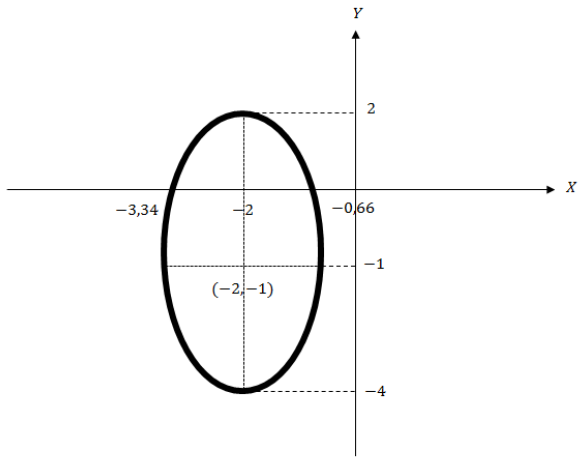
$$X_1 = \frac{-36+24}{18} = 0{,}66 \text{ dan } X_2 = \frac{-36-24}{18} = -3{,}34$$

- Perpotongan di sumbu Y di saat X = 0 didapat persamaan $2Y^2 + 4Y + 20 = 0$

$$Y_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(2)(20)}}{2(2)}$$

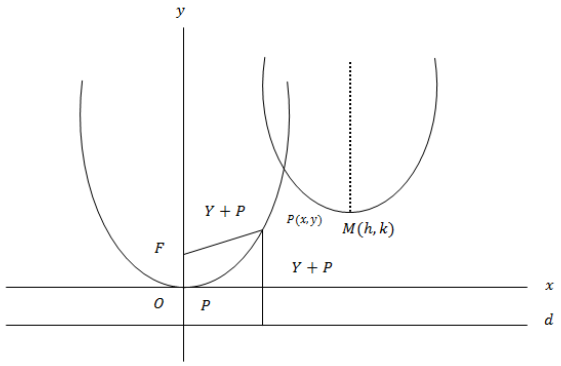
$$Y_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 160}}{4}$$

Karena akar minus tidak terdefinisikan berarti gambar elips ini tidak memotong sumbu Y, namun hanya memotong sumbu X saja.



C. Parabola

Parabola adalah kedudukan titik-titik yang jumlah jaraknya sampai suatu garis yang dinamakan direktris d sama dengan jaraknya sampai suatu titik yang dinamakan fokus F.



Persamaan Parabola melalui titik O (0,0) dengan pusat P berhimpit dengan titik O. Dengan hukum Phytagoras:

$$x^2 + (y - p)^2 = (y + p)^2$$

$$x^2 - 2yp = 2yp$$

$$x^2 = 4yp$$

$$Y = \frac{1}{4}px^2 = ax^2$$

Bila parabola dipindahkan sejajar sehingga tidak di titik O tetapi di M (h,k) maka persamaan menjadi:

$$(x - h)^2 = 4p(-k)$$

$$x^2 - 2hx - 4py + (h^2 + 4pk) = 0$$

Dimana h dan k dapat bernilai (+) atau (-)

Bentuk umum persamaan Parabola:

$Y = ax^2 + bx + c \rightarrow$ untuk sumbu sejajar Y

$X = ay^2 + by + c \rightarrow$ untuk sumbu sejajar X

Setiap parabola mempunyai titik puncak atau disebut titik ekstrim. Letak dari titik ekstrim ini mengakibatkan parabola akan mempunyai 4 kemungkinan bentuk parabola nya masing-masing sebagai berikut:

Bila sumbu simetris dari parabola sejajar dengan sumbu Y maka:

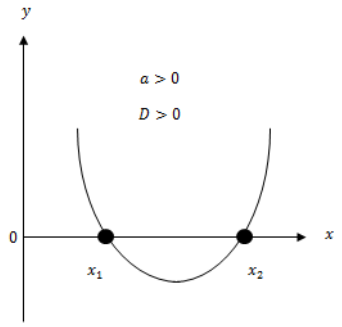
- Parabola terbuka ke atas (titik puncak di bawah)
- Parabola terbuka ke bawah (titik puncak di atas)

Bila sumbu simetris dari parabola sejajar dengan sumbu X maka:

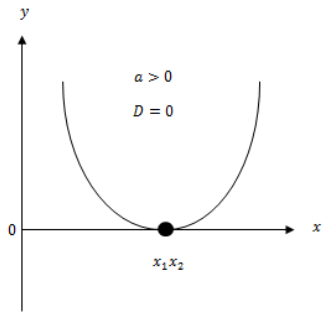
- Parabola terbuka ke kanan (titik puncak ke kiri)
- Parabola terbuka ke kiri (titik puncak di kanan)

Macam-Macam Parabola

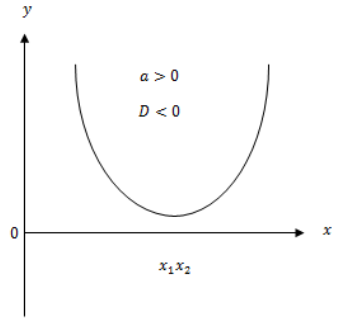
A. Jika **a > 0 dan D > 0**, maka parabola akan terbuka ke atas dan memotong sumbu X di dua titik yang berlainan.



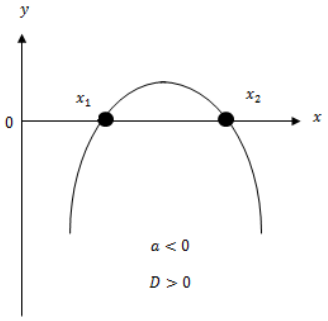
B. Jika **a > 0 dan D = 0**, maka parabola akan terbuka ke atas dan menyinggung sumbu X di dua titik yang berimpit.



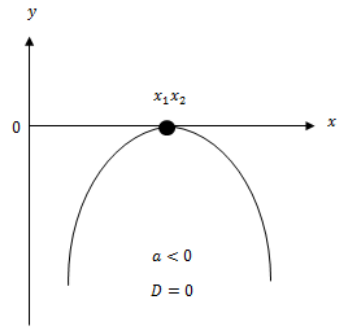
C. Jika **a > 0 dan D < 0**, maka parabola akan terbuka ke atas dan tidak memotong maupun menyinggung sumbu X.



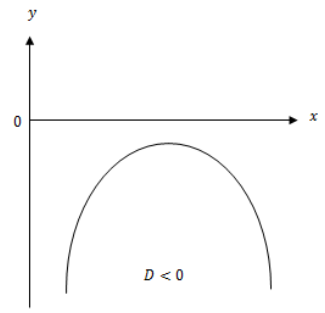
D. Jika **a < 0 dan D > 0**, maka parabola akan terbuka ke bawah dan memotong sumbu X di dua titik yang berlainan.



E. Jika **a < 0 dan D = 0**, maka parabola akan terbuka ke bawah dan menyinggung sumbu X di dua titik yang berimpit.



F. Jika **a < 0 dan D < 0**, maka parabola akan terbuka ke bawah dan tidak memotong maupun menyinggung sumbu X.



4.2 Koordinat Titik Potong Sumbu

Titik potong parabola dengan sumbu X maupun Y dapat ditentukan dengan misal:

$x = 0 \rightarrow$ titik potong dengan sumbu Y

$y = 0 \rightarrow$ titik potong dengan sumbu X

4.3 Nilai Ekstrim: Maksimum dan Minimum

Suatu parabola mempunyai satu titik puncak. Titik puncak (*vertex*) adalah titik di mana arah perubahan fungsi dari menaik ke menurun atau dari menurun ke menaik. Dengan kata lain, titik puncak adalah titik yang paling bawah (dasar) dari parabola bilamana parabola terbuka ke atas atau titik

paling atas dari parabola bilamana parabola terbuka ke bawah. Jadi, titik puncak ini dapat berupa titik minimum.

Koordinat titik puncak dari suatu parabola dapat diperoleh dengan rumus:

$$\text{Titik puncak} = \left\{\frac{-b}{2a}, \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}\right\}$$

Rumus Kuadrat

Jika $Y = 0$, maka bentuk umum dari fungsi kuadrat $Y = ax^2 + bx + c$ akan menjadi persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$. Nilai-nilai penyelesaian untuk x yang juga disebut akar-akar dari persamaan kuadrat dapat diperoleh dengan cara memfaktorkan atau dengan menggunakan rumus kuadrat. Rumus kuadrat ini adalah,

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Suku di dalam tanda akar pada persamaan, yaitu $b^2 - 4ac$ disebut diskriminan. Nilai diskriminan ini akan menentukan apakah parabola vertikal memotong, menyinggung, atau tidak memotong maupun menyinggung sumbu X. Jika nilai $b^2 - 4ac$ adalah negatif, maka tidak terdapat titik potong dengan sumbu X; jika nilai $b^2 - 4ac$ adalah sama dengan nol, maka terdapat satu titik potong dengan sumbu X; jika nilai $b^2 - 4ac$ adalah positif, maka terdapat dua titik potong dengan sumbu X. Jadi, rumus kuadrat ini hanya digunakan bila $b^2 - 4ac$ positif atau sama dengan nol.

Contoh:

Jika fungsi kuadrat $y = x^2 - 8x + 12$, carilah koordinat titik puncak dan gambarkanlah parabolanya

Penyelesaian:

$$\text{Koordinat titik puncak} = \left\{\frac{-b}{2a}, \frac{-(b^2-4ac)}{4a}\right\}$$

$$= \left\{\frac{-8}{2}, \frac{-(64-48)}{4}\right\}$$

$$= (4, -4)$$

Untuk X = 0, maka Y = 12

Titik potong sumbu Y adalah (0, 12)

Untuk $Y = 0, maka\ x^2 - 8x + 12 = 0$

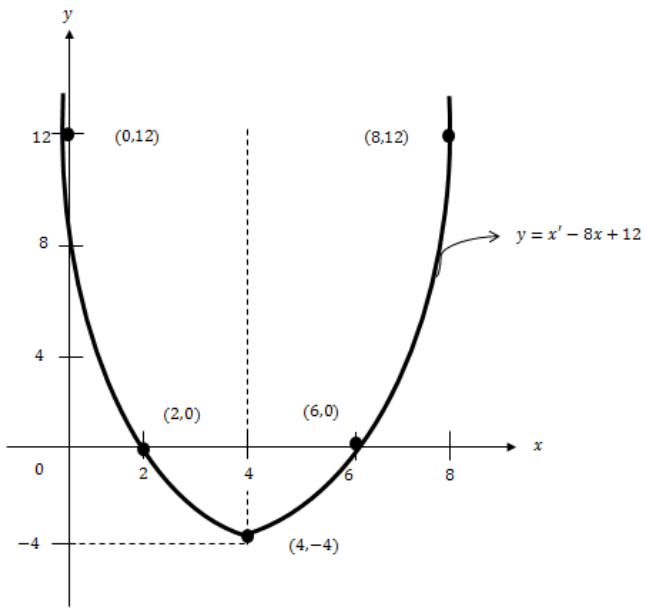
$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$x_1 = \frac{8+4}{2} = 6$$

$$x_2 = \frac{8-4}{2} = 2$$

Titik potong sumbu X adalah (2,0) dan (6,0).

Berdasarkan nilai-nilai penyelesaian dari titik puncak dan titik potong sumbu X dan Y, maka kurva parabolanya dapat digambarkan seperti gambar.



Fungsi kuadrat juga mempunyai bentuk umum yang lain, yaitu:

$$x = f(y) = ay^2 + by + c$$

Bentuk umum seperti ini, bila digambarkan dalam bidang koordinat Cartesius, kurvanya adalah parabola horizontal. Parabola horizontal ini akan terbuka ke kanan atau terbuka ke kiri tergantung dari nilai koefisien a > 0, parabola akan terbuka ke kanan; dan jika koefisien a < 0, parabola akan terbuka ke kiri.

Sumbu simetri dari parabola horizontal adalah sejajar dengan sumbu X. Sedangkan koordinat titik puncak nilai X dan Y saling dipertukarkan tempatnya yaitu (Y,X) atau rumusnya adalah,

$$Titik\ puncak = \left\{\frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}, \frac{-b}{2a}\right\}$$

Karena parabola horizontal ini terbuka ke kanan atau ke kiri, maka akan memotong sumbu Y. Jika D > 0, maka parabola akan memotong sumbu Y di

dua titik; jika D = 0, maka parabola akan menyinggung sumbu Y di satu titik; jika D < 0, maka parabola tidak akan memotong sumbu Y.

Contoh:

Jika fungsi kuadrat $x = y^2 - y - 6$, carilah koordinat titik puncak dan gambarkanlah parabolanya.

Penyelesaian:

$$\text{Koordinat titik puncak} = \left\{\frac{-(b^2-4ac)}{4a}, \frac{-b}{2a}\right\}$$

$$= \left\{\frac{-[1^2-4(1)(-6)]}{4(1)}, \frac{1}{2(1)}\right\}$$

$$= \left\{\frac{-25}{4}, \frac{1}{2}\right\}$$

Untuk Y = 0, maka X = -6.

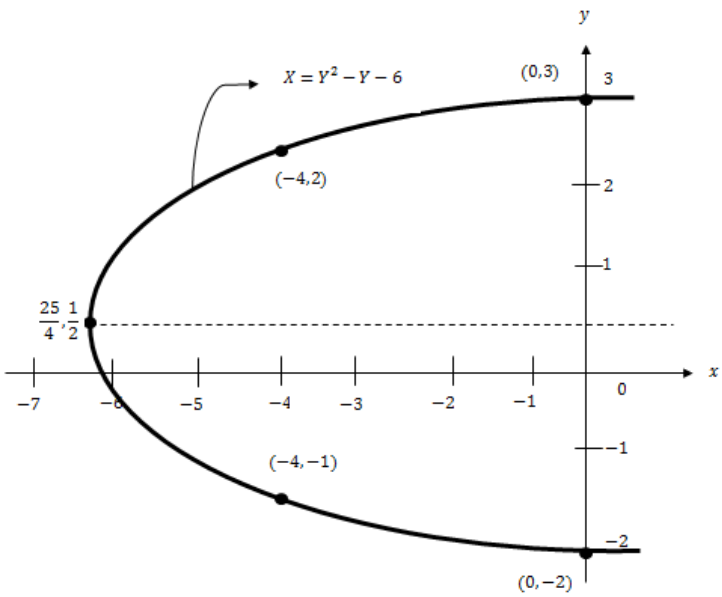
Untuk X = 0, maka $Y^2 - Y - 6 = 0$

$$Y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$Y_1 = \frac{1+5}{2} = 3$$

$$Y_2 = \frac{1-5}{2} = -2$$

Titik potong sumbu Y adalah (0,3) dan (0,-2). Berdasarkan nilai-nilai penyelesaian dari titik puncak dan titik potong sumbu X dan Y, maka kurva parabolanya dapat digambarkan seperti pada gambar.



4.4 Koordinat Titik Potong 2 Fungsi

$$X_1 = X_2 atau\, Y_1 = Y_2$$

<u>*Contoh*</u>:

Fungsi $Y_1 = X^2 - 4X + 3$

$Y_2 = -X^2 + 4X - 3$

<u>*Penyelesaian*</u>:

$$Y_1 = Y_2$$

$X^2 - 4X + 3 = -X^2 + 4X - 3$

$2X^2 - 8X + 6 = 0$ (dibagi 2)

$X^2 - 4X + 3 = 0$

$(X - 1)\,(X - 3) = 0$

$X = 1 \qquad X = 3$

$X = 1 \rightarrow Y = 1^2 - 4(1) + 3 = 0 \rightarrow (1,0)$

$X = 3 \rightarrow Y = 3^2 - 4(3) + 3 = 0 \rightarrow (3,0)$

4.5 Latihan Soal

1. Diketahui fungsi $x = -y^2 + 4$

   Gambarkan grafiknya

   Jawab:

   Titik potong pada sumbu $X \rightarrow Y = 0 \rightarrow X = 4 \rightarrow (4,0)$

   Titik potong pada sumbu $Y \rightarrow X = 0 \rightarrow 0 = -y^2 + 4$

$$y = \pm 4$$

$$y = \pm 2$$

$$(0, -2) \ \& \ (0,2)$$

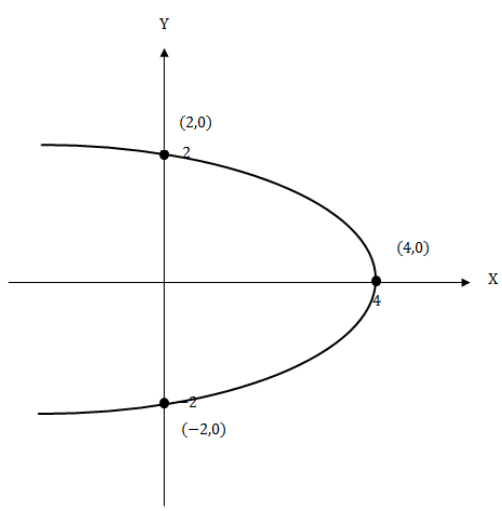
   Mencari Titik Ekstrim

$$TE = \left\{\frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}, \frac{-b}{2a}\right\}$$

$$= \left\{\frac{-(0^2 - 4\cdot(-1)\cdot 4}{4(-1)}, \frac{-0}{2(-1)}\right\}$$

$$= (4,0)$$

   Menggambar Grafik : Y = 0



BAB V

APLIKASI FUNGSI KUADRAT DALAM EKONOMI

5.1 Fungsi Permintaan, Fungsi Penawaran dan Keseimbangan Pasar

A. Fungsi Permintaan

Contoh:

Diketahui fungsi permintaan suatu barang adalah $y = x^2 - 7x + 12$ dimana y adalah harga (P) dan x adalah kuantitas (Q). Gambarkan kurvanya.

· Titik potong dengan sumbu Y

Misalkan $x = 0 \rightarrow y = 12 \rightarrow$ Titik potong $(0,12)$

· Titik potong dengan sumbu X

Misalkan $y = 0 \rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0$

Karena $D = 49 - 4(1)(12) = 1 \rightarrow D > 0$

maka ada dua titik potong dengan sumbu X, yaitu:

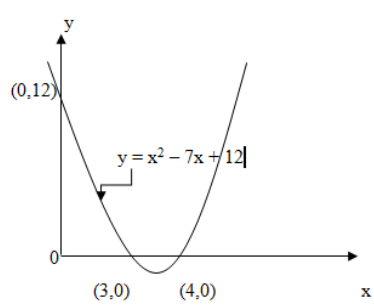
$x^2 - 7x + 12 = 0$

$(x - 3)(x - 4) = 0$

$x_1 = 3$ dan $x_2 = 4 \rightarrow$ titik potong $(3,0)$ dan $(4,0)$

Karena $a > 0$, maka kurva parabola terbuka ke atas (titik ekstrim minimum).

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right) \rightarrow \left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$



Berdasarkan kurva permintaan di atas, tampak bahwa fungsi permintaan $y = x^2 - 7x + 12$ berlaku untuk interval jumlah permintaan $0 \leq x \leq 3$ dan harga permintaan $0 \leq y \leq 12$

Atau fungsi permintaan di atas dinyatakan dengan:

$$P = Q^2 - 7Q + 12 \text{ untuk } 0 \leq Q \leq 3 \text{ dan } 0 \leq P \leq 12$$

B. Fungsi Penawaran

Contoh:

Diketahui fungsi penawaran sejenis barang adalah $y = x^2 + 3x + 2$, dimana y adalah harga (P) dan x adalah kuantitas (Q). Gambarkan kurvanya.

- Titik potong dengan sumbu Y

Misalkan $x = 0 \rightarrow y = 2$

- Titik potong dengan sumbu X

Misalkan $y = 0 \rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0$

Karena $D = 9 - 4(1)(2) = 1 \rightarrow D > 0$

maka terdapat dua titik potong dengan sumbu X, yaitu:

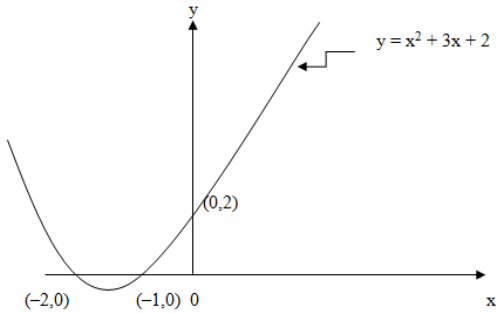
$x^2 + 3x + 2 = 0$

$(x + 1)(x + 2) = 0$

$x_1 = -1$ dan $x_2 = -2$ menghasilkan titik potong $(-1,0)$ dan $(-2,0)$

Karena $a > 0$, maka kurva parabola terbuka ke atas (titik ekstrim minimum).

$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right) \rightarrow \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$



Berdasarkan kurva penawaran di atas, tampak bahwa fungsi penawaran $y = x^2 + 3x + 2$ berlaku untuk interval jumlah penawaran $x \geq 0$ dan harga permintaan $y \geq 2$.

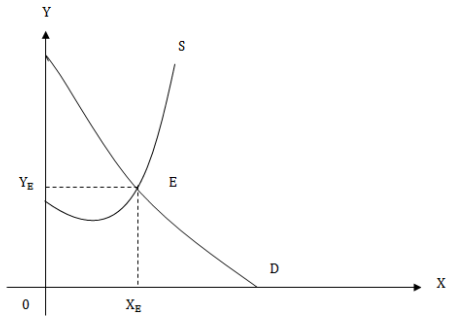
Atau fungsi permintaan di atas dinyatakan dengan:

$$P = Q^2 + 3Q + 2 \text{ untuk } Q \geq 0 \text{ dan } P \geq 2$$

C. Keseimbangan Pasar

Keseimbangan pasar terjadi ketika jumlah permintaan sama dengan jumlah penawaran atau $Qd = Qs$, harga yang tercipta pada keseimbangan pasar merupakan harga keseimbangan (Pe). Jika dilukiskan

dalam kurva sebagai berikut:



Contoh:

Tentukan harga dan kuantitas keseimbangan pasar, dari fungsi permintaan dan fungsi penawaran (dimana X adalah kuantitas dan Y adalah tingkat harga) sebagai berikut:

Qd: $Y = X^2 - 5X - Y + 1 = 0$

Qs: $Y = 2X^2 + Y - 9 = 0$

Tentukan keseimbangan pasar

Penyelesaian:

Pada keseimbangan pasar berlaku $Qd = Qs$ atau $Pd = Ps$, sehingga keseimbangan pasar dapat diselesaikan dengan substitusi:

$Y = X^2 + 5X + 1 = 0$

$Y = -2X^2 + 9$

$X^2 + 5X + 1 = -2X^2 + 9$

$3X^2 + 5X - 8 = 0$

$(3X + 8)(X - 1) = 0$

Atau gunakan rumus ABC:$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2} - 4ac}{2a}$

Jadi $X_1 = -2\frac{2}{3}$, $\quad X_2 = 1$

Nilai X_2 dimasukkan ke persamaan fungsi permintaan atau penawaran sehingga $\quad Y = -2(1)^2 + 9$

$Y = 7$

Maka $Y_E = 7$ dan $X_E = 1$

5.2 Efek Pajak dan Subsidi Pada Keseimbangan Pasar

A. Pajak

Pajak atau subsidi berpengaruh langsung terhadap harga jual atau dengan kata lain berubahnya fungsi penawaran sehingga:

- Bila dikenakan pajak, harga jual naik akibatnya kuantitas turun.
- Bila diberi subsidi, harga jual turun akibatnya kuantitas akan naik.

Beban Pajak yang ditanggung konsumen:

$tk = P'_E - P_E$

$P'_E =$ harga keseimbangan pasar sesudah pajak

$P_E =$ harga keseimbangan pasar sebelum pajak

Beban Pajak yang ditanggung produsen:

$t =$ besarnya pajak yang dikenakan

$tk =$ pajak yang ditanggung oleh konsumen

Total pajak yang diterima pemerintah:

$T = Q'_E \cdot t$

$Q'_E =$ jumlah barang yang terjual

$t =$ besarnya pajak per unit

Contoh:

Fungsi Permintaan dan Fungsi Penawaran $Qd = 10 - 4P^2$ dan $Qs = -5 + 2P^2$ dan jika pemerintah memberi beban pajak sebesar 2 per unit produk. Tentukan:

a. Keseimbangan pasar yang baru

$Qd = Qs$

$10 - 4P^2 = -5 + 2(P - 2)^2$

$10 - 4P^2 = -5 + 2(P^2 - 4P + 4)$

$10 - 4P^2 = -5 + 2P^2 - 8P + 8$

$0 = 2P^2 + 4P^2 - 8P + 8 - 5 - 10$

$0 = 6P^2 - 8P - 7$

$P_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$P_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{-8^2 - 4(6)(7)}}{2(6)} = \frac{8 \pm 15{,}23}{12}$

$P_1 = \frac{8 + 15{,}23}{12} = 1{,}93$ dan $P_2 = \frac{8 - 15{,}23}{12} = 0{,}6025$

Harga keseimbangan pasar yang dipergunakan untuk menghitung jumlah keseimbangan pasar adalah $P_1 = P_e = 1{,}93$

$Q = 10 - 4P^2$

$Q = 10 - 4(1{,}93)^2$

$Q = 10 - 14{,}8996$

$Qe' = -4{,}8996$

b. Beban pajak untuk konsumen dan produsen

- Beban pajak konsumen:

  $Tk = (Pe' - Pe)Qe'$

  $Tk = (1{,}93 - 1{,}58) - 4{,}8996$

  $Tk = -1{,}71486$

- Beban pajak produsen:

  $Tp = (t - (Pe' - Pe)Qe')$

  $Tp = (2 - (1{,}93 - 1{,}58) - 4{,}8996)$

  $Tp = -8{,}08434$

c. Total pajak yang diterima pemerintah

$T = Qe' \cdot t = -4{,}8996 \cdot 2 = -9{,}7992$

B. Subsidi

Subsidi yang diberikan atas suatu barang menyebabkan harga jual barang tersebut menjadi rendah. Dengan adanya subsidi, produsen merasa ongkos produksinya menjadi lebih rendah sehingga ia bersedia untuk menjual lebih murah barang yang diproduksinya. Akibatnya harga keseimbangan yang tercipta di pasar lebih rendah dari pada harga keseimbangan sebelum adanya subsidi, dan jumlah keseimbangan menjadi lebih banyak.

Dengan adanya subsidi yang bersifat spesifik atas suatu barang (s) kurva penawaran bergeser sejajar ke bawah, dengan penggal yang lebih kecil (lebih rendah) dari sumbu harga, sedangkan grafik fungsi permintaan tidak terpengaruh dengan adanya subsidi.

Jika sebelum subsidi persamaan penawaran suatu barang adalah:

$$P = a + bQs$$

Setelah ada subsidi akan menjadi:

$$P = a + bQs - s$$

$$P = (a - s) + bQs$$

Besarnya subsidi yang dinikmati konsumen:

$sk = P_E - P'_E$

$P_E =$ harga keseimbangan pasar sebelum subsidi

$P'_E =$ harga keseimbangan pasar sesudah subsidi

Besarnya subsidi yang dinikmati produsen:

$sp = s - sk$

$s =$ besarnya subsidi

$sk =$ bagian subsidi yang dinikmati konsumen

Total subsidi yang ditanggung pemerintah:

$S = Q'_E - s$

$Q'_E =$ jumlah barang yang terjual

$s =$ besarnya subsidi per unit

Contoh:

Fungsi permintaan suatu barang ditunjukan oleh persamaan $Qd = 15 - P$, dan Fungsi penawaran ditunjukan oleh persamaan $Qs = -6 + 2P$, besar subsidi (s) yang diberikan pemerintah terhadap barang tersebut adalah sebesar Rp. 1,5/unit.

Tentukan:

a. Keseimbangan pasar yang baru

   $Qd = Qs$

   $10 - 4P^2 = -5 + 2(P - 2)^2$

b. Besar harga keseimbangan dan jumlah keseimbangan sebelum subsidi.

   Harga keseimbangan dan jumlah keseimbangan sebelum subsidi (E)

   $Qd = Qs$

$15 - P = -6 + 2P$

$15 + 6 = P + 2P$

$21 = 3P$

$P = \frac{21}{3}$

$P = 7$

$Qd = 15 - P$

$Qd = 15 - 7$

$Qd = 8$

$Qs = -6 + 2P$

$Qs = -6 + 2(7)$

$Qs = -6 + 14 = 8$

Sehingga diperoleh harga keseimbangan sebelum subsidi adalah sebesar Rp 7 dan kuantitas keseimbangan sebesar 8 kg. Dalam hal ini pada harga Rp 7, jumlah barang yang diminta maupun ditawarkan sama yaitu sebanyak 8 kg.

c. Besar harga keseimbangan dan jumlah keseimbangan setelah subsidi.

Harga keseimbangan dan jumlah keseimbangan setelah subsidi (E')

Fungsi Permintaan : $Qd = 15 - P$

Fungsi Penawaran : $Qs = -6 + 2P$

$2P = Qs + 6$

$P = \frac{Qs+6}{2}$

$P = 0{,}5\ Qs + 3$

$P = 3 + 0{,}5\ Qs$

Karena besar subsidi yang diberikan pemerintah adalah Rp.1,5/ unit, maka fungsi penawarannya menjadi :

$P = a + bQs - s$

$P = 3 + 0{,}5Qs - 1{,}5$

$P = (3 - 1{,}5) + 0{,}5\,Qs$

$P = 1{,}5 + 0{,}5Qs$

$0{,}5Qs = -1{,}5 + P$

$Qs = -3 + 2P$

Harga keseimbangan setelah subsidi:

$Qd = Qs$

$15 - P = -3 + 2P$

$15 + 3 = 2P + P$

$18 = 3P$

$P = 6$

Jumlah keseimbangan setelah subsidi:

$Qd = 15 - P$	$Qs = -3 + 2P$
$Qd = 15 - 6$	$Qs = -3 + 2(6)$
$Qd = 9$	$Qs = -3 + 12$
	$Qs = 9$

Sehingga diperoleh harga keseimbangan setelah subsidiadalah sebesar Rp.6 dan jumlah keseimbangannya adalah sebesar 9 unit.

d. Gambarkan grafik keseimbangan pasarnya.

Titik potong sumbu P dan Q sebelum subsidi:

Fungsi Permintaan Qd = 15 – P

1. Mencari titik potong sumbu Qd, dengan syarat $P = 0$, maka nilai Qd dapat dihitung sebagai berikut:

   $Qd = 15 - P$

$Qd = 15 - 0$

$Qd = 15$

Sehingga diperoleh titk potongnya adalah $Qd\ (0, 15)$

2. Mencari titik potong sumbu P, dengan syarat $Qd = 0$, maka nilai P dapat dihitung sebagai berikut:

   $Qd = 15 - P$

   $0 = 15 - P$

   $P = 15$

   Sehingga diperoleh titk potongnya adalah $P\ (15, 0)$

Fungsi Penawaran Qs = -6 + 2P

1. Mencari titik potong sumbu Qs, dengan syarat $P = 0$, maka nilai Qs dapat dihitung sebagai berikut:

   $Qs = -6 + 2P$

   $Qs = -6 + 2(0)$

   $Qs = -6 + 0$

   $Qs = -6$

   Sehingga diperoleh titk potongnya adalah $Qd\ (0, -6)$

2. Mencari titik potong sumbu P, dengan syarat $Qs = 0$, maka nilai P dapat dihitung sebagai berikut :

   $Qs = -6 + 2P$

   $0 = -6 + 2P$

   $2P = 6$

   $P = \frac{6}{2} = 3$

   Sehingga diperoleh titk potongnya adalah $P\ (3, 0)$

Titik potong sumbu P dan Q setelah subsidi

Fungsi Permintaan $Qd = 15 - P$

Titik potongnya sumbu P dan Q pada fungsi permintaan sama dengan sebelum subsidi yaitu pada titik adalah $Qd\ (15, 0)$ dan $P\ (0, 15)$

Fungsi Penawaran $Qs = -3\ +\ 2P$

1. Mencari titik potong sumbu Qs, dengan syarat $P\ =\ 0$, maka nilai Qs dapat dihitung sebagai berikut:

   $Qs = -3 + 2P$

   $Qs = -3 + 2(0)$

   $Qs = -3\ + 0$

   Sehingga diperoleh titk potongnya adalah Qs $(0, -3)$

2. Mencari titik potong sumbu P, dengan syarat $Qs\ =\ 0$, maka nilai P dapat dihitung sebagai berikut:

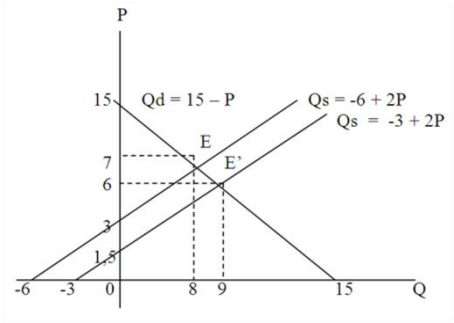
   $Qs = -3\ +\ 2P$

   $0 = -3\ +\ 2P$

   $2P = 3$

   $P\ = 1{,}5$

   Sehingga diperoleh titk potongnya adalah $P\ (1{,}5;\ 0)$



5.3 Fungsi Biaya, Fungsi Penerimaan, Laba/Rugi dan Analisis Pulang Pokok (BEP)

A. Fungsi Biaya

Fungsi biaya merupakan hubungan antara biaya dengan jumlah produksi yang dihasilkan, fungsi biaya dapat digambarkan ke dalam kurva dan kurva biaya menggambarkan titik-titik kemungkinan besarnya biaya di berbagai tingkat produksi. Dalam membicarakan biaya ada beberapa macam biaya, yaitu:

- Biaya Total (Total Cost = TC = C)
- Biaya Variabel (Variable Cost = VC)
- Biaya Tetap (Fixed Cost = FC)
- Biaya Total Rata-Rata (Average Total Cost = AC)
- Biaya Variabel Rata Rata (Average Variable Cost = AVC)
- Biaya Tetap Rata-Rata (Average Fixed Cost = AFC)
- Biaya Marginal

Rumus :

$C = AC\ x\ Q\ \ atau\ C = FC + VC$

$FC = AFC\ X\ Q$

$VC = AVC\ \ X\ Q$

Biaya Total yaitu $C = f\ (Q)$

Biaya Marginal yaitu $MC \approx C' \approx = f'\ (Q)$

Biaya total tak lain adalah Integral dari biaya marginal

$C = \int MC\ d\ Q = \int f'\ (Q)\ d\ Q$

Contoh:

Biaya marjinal suatu perusahaan ditunjukkan oleh $MC = 3Q2 - 6Q + 4$. Carilah persamaan biaya total dan biaya rata-ratanya.

Biaya Total:

$C = \int MC\ d\ Q$

$= \int (3Q\text{^}2 - 6Q + 4)\ d\ Q$

$= Q^3 - 3Q^2 + 4Q + k$

Biaya Rata-Rata

$(AC) = Q^2 - 3Q + 4 + :$

$C = Q\text{^}3 - 3\,Q^2 + 4Q + 4$

$AC = Q2 - 3Q + 4$

B. Fungsi Penerimaan

Penerimaan Total yaitu $R = f\,(Q)$

Penerimaan Marjinal yaitu $MR = R' \approx = f'\,(Q)$

Penerimaan total tak lain adalah Integral dari penerimaan marjinal

$$C = \int MR\,d\,Q = \int f'\,(Q)d\,Q$$

Contoh:

Carilah persamaan penrimaan total dari penerimaan rata-rata dari perusahaan jika penerimaan marjinalnya $MR = 16 - 4Q$

Penerimaan Total, yaitu

$R = \int MR\,d\,Q$

$R = \int (16 - 4Q)\,d\,Q$

$R = 16\,Q - 2\,Q^2$

Penerimaan rata-rata, yaitu:

$AR = 16 - 2Q$

Dalam persamaan penerimaan total konstanta $k = 0$, sebab penerimaan akan ada jika tak ada barang yang dihasilkan atau terjual.

Biaya merupakan fungsi dari jumlah produksi, dengan notasi $C = f(Q)$

C = biaya total

Q = jumlah produksi.

Dalam menganalisa biaya umumnya tidak terlepas dari analisa penerimaan atau *revenue* atau *total revenue*. Pengertian *revenue* atau penerimaan adalah seluruh pendapatan yang diterima dari hasil penjualan barang pada tingkat harga tertentu. Secara matematik *total revenue* dirumuskan sebagai berikut:

$TR = PQ$

TR = Penerimaan Total

P = Harga Barang

Q = Jumlah barang yang dijual.

Penerimaan rata-rata (AR) adalah penerimaan rata-rata tiap unit produksi, dapat dirumuskan:

$$AR = \frac{TR}{Q}$$

Penerimaan Marginal atau Marginal Revenue adalah tambahan penerimaan sebagai akibat dari tambahan produksi dapat dirumuskan:

$MR = \frac{\Delta TR}{\Delta Q}$ atau turunan dari TR.

MR = Marginal Revenue

ΔTR = Tambahan penerimaan

ΔQ = Tambahan Produksi

Berdasarkan konsep penerimaan dan biaya (TR dan TC) dapat diketahui beberapa kemungkinan diantaranya :

$TR < TC$ = keadaan untung / laba

$TR = TC$ = keadaan Break Even Point

$TR > TC$ = Keadaan rugi

Contoh:

Sebuah pabrik Sandal dengan Merk " Idaman" mempunyai biaya tetap (FC) = 1.000.000; biaya untuk membuat sebuah sandal Rp 500; apabila sandal tersebut dijual dengan harga Rp 1.000, maka tentukan:

- Fungsi biaya total (C), fungsi penerimaan total (TR) dan Variabel Cost
- Pada saat kapan pabrik sandal mencapai BEP
- Untung atau rugikah apabila memproduksi 9.000 unit

Penyelesaian:

- Fungsi Biaya Total (C), Fungsi Penerimaan Total (TR) dan Variabel Cost.

  $C \ = \ Rp\ 1.000.000$

  $VC = Rp\ 500$

  Fungsi Biaya Variabel $VC \ = \ 500 \ \ Q \ *** \ (1)$

  Fungsi Biaya Total $C = \ FC \ + \ VC$

  $$C = 1.000.000 \ + \ 500\ Q \ *** \ (2)$$

  Fungsi Penerimaan Total $TR \ = \ P.Q$

  $$TR \ = \ 1.000\ Q \ \ *** \ (3)$$

- Break Even Point terjadi pada saat TR = TC

  $1.000\ Q \ \ = \ Rp\ 1.000.000 \ + \ 500\ Q$

  $1.000\ Q \ - \ 500\ Q \ = \ 1.000.000$

  $500\ Q \ = \ 1.000.000$

  $Q \ = \ 2.000\ unit$

  Pabrik roti akan mengalami BEP pada saat Q = 2.000 unit

  Pada biaya total:

  $C \ = \ 1.000.000 \ + \ 500\ (\ 2.000)$

  $C \ = \ 2.000.000$

- Pada saat memproduksi Q = 9000 unit

$TR = P.Q$

$TR = 1.000 \ X \ 9.000 = 9.000.000$

$C = 1.000.000 + 500 \ (Q)$

$C = 1.000.000 + 500 \ (9.000)$

$C = 1.000.000 + 4500.000 = 5.500.000$

- Bila TR > TC, maka keadaan laba / untung.
.

$\text{laba} = \text{TR} - \text{TC}$

$= 9.000.00 - 5.500.000 = 3.500.000$

Bila hanya memproduksi 1.500 unit maka akan mengalami kerugian sebesar

Rugi $= TR - TC$

$= 1.000 \ (1.500) - 1.000.000 + 500 \ (1.500)$

$= 1.500.000 - 1.750.000$

$= 250.000$

C. Analisis Pulang Pokok (BEP)

BEP adalah suatu kondisi dimana perusahaan tidak memperoleh keuntungan maupun mengalami kerugian ($\pi = 0$). Fungsi ini dibentuk bersama oleh fungsi biaya dan fungsi penerimaan, sehingga kurvanya juga berupa parabola terbuka ke bawah dan ke atas. Besarnya biaya produksi yang dikeluarkan (C= Total Cost) sama dengan besarnya hasil penjualan (R = Total Revenue). Bentuk umum dari persamaan BEP adalah:

R = C

Contoh:

Jika diketahui fungsi penerimaan dinyatakan dalam persamaan $R = -Q^2 + 10Q$ dan fungsi biaya dinyatakan dalam persamaan $C = -3Q^2 + 5Q + 10$. Pada tingkat produksi berapa unit terjadi titik pulang pokok ?

Penyelesaian:

Diketahui:

$R = -Q^2 + 10Q$ dan $C = -3Q^2 + 5Q + 10$

Syarat BEP: R = C

$-Q^2 + 10Q = -3Q^2 + 5Q + 10$

$-Q^2 + 10Q + 3Q^2 - 5Q - 10 = 0$

$2Q^2 + 5Q - 10 = 0$

Diperoleh a = 2, b = 5 dan c = -10

Dicari dengan rumus ABC

$Q_{1,2} = -b \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$Q_{1,2} = -5 \pm \frac{\sqrt{52-4(2)(-10)}}{2(2)}$

$Q_{1,2} = -5 \pm \frac{\sqrt{25+80}}{4}$

$Q_{1,2} = -5 \pm \frac{\sqrt{105}}{4}$

$Q_1 = \frac{-5+10,25}{4} = 1,31$

$Q_2 = \frac{-5-10,25}{4} = -3,81$ (tidak terpakai)

Substitusi $Pe = 1,31$ ke salah satu persamaan:

$R = -Q^2 + 10Q$

$R = -(1,31)2 + 10(1,31)$

$R = -1,72 + 13,1$

$R = 11,38 = 11,4$

$C = -3Q^2 + 5Q + 10$

$C = -3(1,31)^2 + 5(1,31) + 10$

$C = -5{,}15 + 6{,}55 + 10$

$C = 11{,}4$

$\pi = R - C$

$\pi = 11{,}4 - 11{,}4$

$\pi = 0$

5.4 Fungsi Utilitas

Utilitas Total: U $= f\ (Q)$

Utilitas Marjinal: MU $= R' \approx = f'\ (Q)$

Utilitas total tak lain adalah Integral dari utilitas marjinal, yaitu:

U $= \int MR\ d\ Q = \int f'\ (Q)\ d\ Q$

Contoh:

Carilah persamaan utilitas total dari seorang konsumen jika utilitas marginalnya MU $= 90 - 10Q$

Utilitas total:

$U = \int MR\ d\ Q$

$U = \int (90 - 10Q)\ d\ Q$

$U = 90Q - 5\ Q2$

Seperti halnya produk total dan penerimaan total, disinipun konstanta k = 0, sebab tidak akan ada kepuasan atau utilitas yang diperoleh jika tak ada barang yang dikonsumsi.

5.5 Fungsi Produksi

Produksi Total:

$P = f\ (Q)$

$P =$ keluaran ; $X =$ masukan

Produksi Marjinal:

$MU = R' \approx = f'(X)$

Produk total tak lain adalah Integral dari Produk marjinal.

$U = \int MPd\,X = \int f'(X)d\,X$

Contoh:

Produk marjinal sebuah perusahaan ditunjukkan oleh $MP = 18X - 3X^2$ carilah persamaan produk total dan produk rata-ratanya.

Penyelesaian:

Produk total:

$P = \int MP\,dQ$

$P = \int \left(18\,X - 3X^2\right) dX$

$P = 9X2 - X^3$

Produk rata-rata:

$AP = 9X - X^2$

Dalam persamaan produk total juga kontanta k = 0, sebab tidak akan ada barang (P) yang dihasilkan jika tidak ada bahan (X) yang diolah atau digunakan.

BAB VI

DEFERENSIAL SEDERHANA

Diferensial membahas tentang tingkat perubahan suatu fungsi sehubungan dengan perubahan kecil dalam variable bebas fungsi yang bersangkutan. Dalam bab ini diferensial yang menyangkut fungsi yang mengandung hanya satu variable bebas dalam persamaannya.

6.1 Kuosien Diferensi dan Derivatif

Jika $y = f(x)$ dan terdapat tambahan variabel bebas x sebesar Δx maka bentuk persamaannya dapat dituliskan menjadi :

$$y = f(x)$$

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - y$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

di mana Δx adalah tambahan x , dan Δy adalah tambahan y berkenaan dengan adanya tambahan x. Jadi Δy timbul karena adanya Δx. Apabila ruas kiri dan ruas kanan persamaan terakhir di atas sama-sama dibagi Δx , maka diperoleh :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Bentuk $\Delta y/\Delta x$ inilah yang disebut dengan hasil bagi perbedaan atau kuosien deferensi (difference quotient), mencerminkan tingkat perubahan rata-rata variabel terikat y terhadap variabel bebas .

Contoh :

Tentukan Kuosien diferensi dari $y = f(x) = 3x^2 - x$

$$y = 3x^2 - x$$
$$y + \Delta y = 3(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x)$$
$$y + \Delta y = 3\{x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2\} - x - \Delta x$$
$$y + \Delta y = 3x^2 + 6x(\Delta x) + 3(\Delta x)^2 - x - \Delta x$$
$$\Delta y = 3x^2 + 6x(\Delta x) + 3(\Delta x)^2 - x - \Delta x - y$$
$$\Delta y = 3x^2 + 6x(\Delta x) + 3(\Delta x)^2 - x - \Delta x - 3x^2 + x$$
$$\Delta y = 6x(\Delta x) + 3(\Delta x)^2$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6x(\Delta x)+3(\Delta x)^2-\Delta x}{\Delta x} = 6x + 3\Delta x - 1$$

Proses penurunan sebuah fungsi disebut juga proses pendiferensian atau diferensiasi, pada dasarnya merupakan penentuan limit, suatu kuosien diferensi dalam hal pertambahan variable bebasnya sangat kecil atau mendekati nol. Hasil yang diperoleh dari proses diferensiasi tersebut dinamakan turunan atau derivatif (derivative). Dengan demikian;

Jika $y = f(x)$

Maka Kuosien Diferensinya $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

Dan Turunan Fungsinya $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

Contoh :

Dari persamaan $y = 3x^2 - x$

diperoleh kuosien diferensi $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x + 3\Delta x - 1$

Maka turunan/derivatinya $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(6x + 3\Delta x - 1)$

$$= 6x + 3(0) - 1$$

$$= 6x - 1$$

Jadi, turunan atau derivatif dari fungsi $y = 3x^2 - x$ adalah $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x - 1$.

Cara menuliskan turunan dari suatu fungsi dapat dilakukan bebarapa macam notasi. Jika fungsi aslinya $y = f(x)$, maka turunannya dapat notasikan:

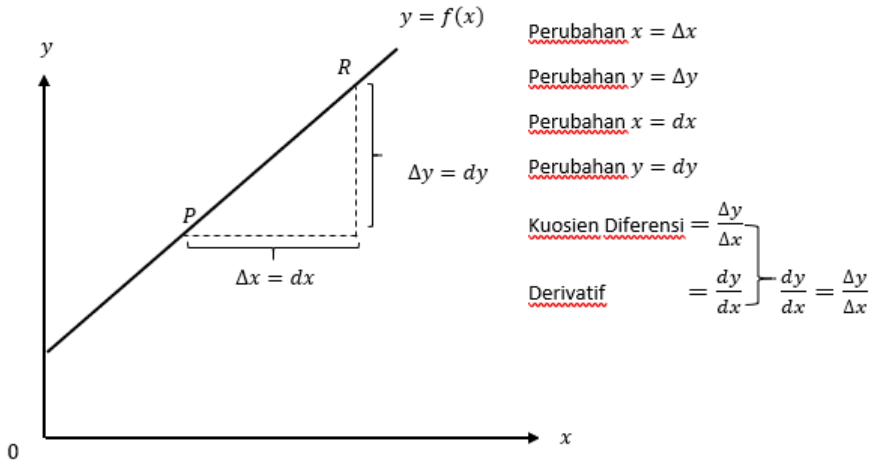
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \equiv y' \equiv f'(x) \equiv y_x \equiv f_x(x) \equiv \frac{dy}{dx} \equiv \frac{df(x)}{\Delta x}$$

6.2 Hakikat Derivatif dan Diferensial

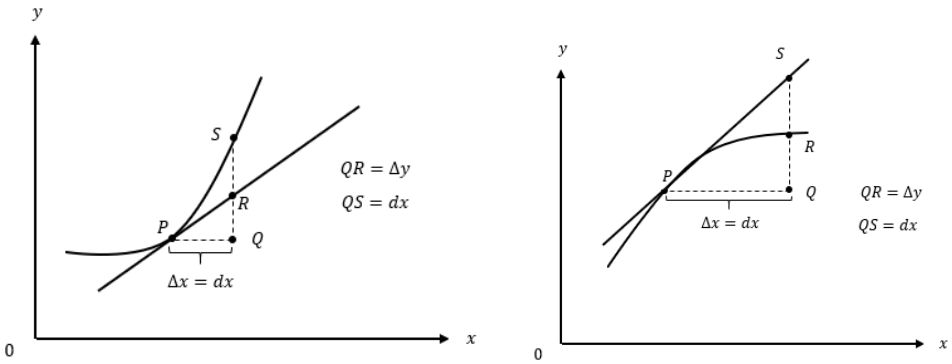
Kousien diferensi $\Delta y/\Delta x$ tak lain adalah lereng kurva $y = f(x)$. Sedangkan derivatif dy/dx adalah $\lim(\Delta y/\Delta x)$ untuk $\Delta x \to 0$. Jika Δx sangat kecil, lim $(\Delta y/\Delta x) = \Delta y/\Delta x$ itu sendiri, dengan perkataan lain derivatif fungsi yang bersangkutan sama dengan kousien diferensinya $(dy/dx = \Delta y/\Delta x)$. Jadi untuk Δx yang sangat kecil, derivatif (seperti halnya kousien diferensi) juga mencerminkan dari lereng kurva $y = f(x)$.

Notasi derivatif sesungguhnya terdiri atas dua suku, yaitu dy dan dx. Suku dy dinamakan diferensial dari y, sedangkan dx merupakan diferensial dari x. Diferensial dari $x(dx)$ mencerminkan perubahan sanagat kecil pada variabel bebas x. Diferensial dari x: $dx = \Delta x$.

Untuk fungsi y = f(x) yang linier, lereng taksiran senantiasa sama dengan lereng sesungguhnya, berapapun Δx . Dengan perkataan lain, derivatif fungsi linier tak lain adalah kuosien diferensinya, $dy/dx = \Delta y/\Delta x$. Berapapun $\Delta x (= dx)$, akan selalu $dy = \Delta y$, sehingga $dy/dx = \Delta y/\Delta x$.



Untuk fungsi $y = f(x)$ yang non–linier, semakin besar Δx semakin besar pula perbedaan antara lereng taksiran (derivatif, dy/dx) dan lereng sesungguhnya (kuosien diferensi, $\Delta y/\Delta x$). Dengan Δx yang semakin besar, semakin besar pula perbedaan dy dan Δy, sehingga kian besar pula perbedaan antara dy/dx dan $\Delta y/\Delta x$ (ingat : $dx = \Delta x$). Dan Sebaliknya.



A B

Gambar a menunjukkan lereng taksiran yang “over-estimated”; $dy > \Delta y$ sehingga derivative $(dy/dx) >$ kuosien diferensi $(\Delta y/\Delta x)$. Sedangkan gambar b memperlihatkan lereng taksiran yang “under-estimated”; $dy < \Delta y$ sehingga derivative $(dy/dx) <$ kuosien diferensi $(\Delta y/\Delta x)$.

Contoh:

1. Andaikan $y = 3x^2 - 4x + 5$ dan ingin diketahui serta dibandingkan nilai dy dan nilai Δy untuk $\Delta x = 0{,}0001$ dari kedudukan $x = 2$.

   $\frac{dy}{dx} = 6x - 4 = 6(2) - 4 = 8 \qquad dy = \frac{dy}{dx}\Delta x = 8(0{,}0001) = 0{,}0008$

   $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

   $= 3(x + \Delta x)^2 - 4(x + \Delta x) + 5 - (3x^2 - 4x + 5)$

   $= 3(2 + 0{,}0001)^2 - 4(2 + 0{,}0001) + 5 - 3(2)^2 + 4(2) - 5$

   $= 0{,}0008$

Dalam contoh ini, untuk $x = 2$ dan $\Delta x = 0{,}0001$ ternyata $dy = \Delta y = 0{,}0008$, konsekuensinya $\frac{dy}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 8$, berarti lereng taksirannya persis sama dengan lereng yang sesungguhnya.

6.3 Kaidah – Kaidah Diferensiasi

1. Diferensiasi Konstanta

   Jika $y = k$, di mana k adalah konstanta, maka $\frac{dy}{dx} = 0$

   Contoh : $y = 5, \qquad \frac{dy}{dx} = 0$

2. Diferensiasi Fungsi Pangkat

   Jika $y = x^n$, di mana n adalah konstanta, maka $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$

   Contoh : $y = x^3, \qquad \frac{dy}{dx} = 3x^{3-1} = 3x^2$

3. Diferensiasi Perkalian Konstanta dengan Fungsi

   Jika $y = kv$, di mana $v = h(x)$, maka $\frac{dy}{dx} = k\frac{dv}{dx}$

   Contoh : $y = 5x^3, \qquad \frac{dy}{dx} = 5(3x^2) = 15x^2$

4. Diferensiasi Pembagian Konstanta dengan Fungsi

Jika $y = \frac{k}{v}$, di mana $v = h(x)$, maka $\frac{dy}{dx} = -\frac{kdv/dx}{v^2}$

Contoh : $y = \frac{5}{x^3}$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{5(3x^2)}{(x^3)^2} = \frac{15x^2}{x^6}$

5. Diferensiasi Penjumlahan (Pengurangan) Fungsi

Jika $y = u \pm v$, di mana $u = g(x)$ dan $v = h(x)$,

maka $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$

Contoh : $y = 4x^2 + x^3$ misalkan $u = 4x^2 \rightarrow \frac{du}{dx} = 8x$

$$v = x^3 \rightarrow \frac{dv}{dx} = 3x^2$$

$\frac{dy}{dx} = 8x + 3x^2$

6. Diferensiasi Perkalian Fungsi

Jika $y = uv$, di mana $u = g(x)$ dan $v = h(x)$, maka $\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} \pm v\frac{du}{dx}$

Contoh : $y = (4x^2)(x^3)$

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} \pm v\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = (4x^2)(3x^2) + (x^3)(8x)$$

$$\frac{dy}{dx} = 12x^4 + 8x^4$$

$$\frac{dy}{dx} = 20x^4$$

7. Diferensiasi Pembagian Fungsi

Jika y = $\frac{u}{v}$, di mana $u = g(x)$ dan $v = h(x)$, maka $\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

Contoh : y = $\frac{4x^2}{x^3}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^3)(8x) - (4x^2)(3x^2)}{(x^3)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8x^4 - 12x^4}{x^6}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4x^4}{x^6} = \frac{-4x}{x^2} = -4^{-2}$$

8. Diferensiasi Fungsi Komposit

Jika $y = f(u)$ sedangkan $u = g(x)$, dengan kata lain $y = f\{g(x)\}$, maka $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} . \frac{du}{dx}$

Contoh : $y = (4x^3 + 5)^2$

misalkan $u = 4x^3 + 5 \rightarrow \frac{du}{dx} = 12x^2$, sehingga $y = u^2 \rightarrow \frac{dy}{dx} = 2u$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} . \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2u(12x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2(4x^3 + 5)(\ 12x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = 96x^5 + 120x^2$$

9. Diferensiasi Fungsi Berpangkat

Jika, $y = u^n$, di mana $u = g(x)$ dan n adalah konstanta,

maka $\frac{dy}{dx} = nu^{n-1}.\frac{du}{dx}$

Contoh : $y = (4x^3 + 5)^2$ misalkan $u = 4x^3 + 5 \rightarrow \frac{du}{dx} = 12x^2$

$\frac{dy}{dx} = nu^{n-1}.\frac{du}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = 2(4x^3 + 5)(12x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = 96x^5 + 120x^2$$

10. Diferensiasi Fungsi Logaritmik

Jika $y = {}^a\log x$, maka $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\ \ln a}$

Contoh : $y = {}^5\log 2$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\ \ln 5}$

11. Diferensiasi Fungsi Komposit-Logaritmik

Jika $y = {}^a\log u$, di mana $u = g(x)$, maka $\frac{dy}{dx} = \frac{{}^a\log e}{u}\ .\frac{du}{dx}$

Contoh : $y = \log\left[\frac{x-3}{x+2}\right]$

Misalkan $u = \frac{(x-3)}{(x+2)} \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{(x+2)-(x-3)}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{{}^a\log e}{u}\ .\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log e}{\left[\frac{x-3}{x+2}\right]}\ .\frac{5}{(x+2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5\log e}{(x-3)(x+2)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5 \log e}{(x^2 - x - 6)}$$

12. Diferensiasi Fungsi Komposit-Logaritmik-Berpangkat

Jika $y = ({}^a\log u)^n$, di mana $u = g(x)$ dan n adalah kostanta,

Maka $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{{}^a\log e}{u} . \frac{du}{dx}$

Contoh : $y = (\log 5x^2)^3$

Misalkan $u = 5x^2 \rightarrow \frac{du}{dx} = 10x$

$$\frac{dy}{dx} = 3(\log 5x^2)^2 . \frac{\log e}{5x^2} . (10x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{30x(\log 5x^2)^2 \ \log e}{5x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6}{x}(\log 5x^2)^2 \ \log e$$

13. Diferensiasi Fungsi Logaritmik-Napier

Jika $y = \ln x$, maka $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

Contoh : $y = 5$, maka $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} = \frac{1}{5}$

14. Diferensiasi Fungsi Komposit-Logaritmik-Napier

Jika $y = \ln u$, di mana $u = g(x)$, maka $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} . \frac{du}{dx}$

Contoh : $y = \ln \left[\frac{x-3}{x+2}\right]$

Misalkan $u = \frac{(x-3)}{(x+2)} \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{5}{(x+2)^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} . \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-2)}{(x-3)} \cdot \frac{5}{(x+2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5}{(x^2 - x - 6)}$$

15. Diferensiasi Fungsi Komposit-Logaritmik-Napier-Berpangkat

Jika $y = (\ln u)^n$, di mana $u = g(x)$ dan n adalah konstanta,

Maka $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$

Contoh : $y = (\ln 5x^2)^3$ Misalkan $u = 5x^2 \rightarrow \frac{du}{dx} = 10x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 3(\ln 5x^2)^3 \left(\frac{1}{5x^2}\right)(10x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6}{x}(\ln 5x^2)^2$$

16. Diferensiasi Fungsi Eksponensial

Jika $y = a^u$, di mana a adalah konstanta, maka $\frac{dy}{dx} = a^x \ln a$

Contoh : $y = 5^x$,

$$\frac{dy}{dx} = a^x \ln a$$

$$\frac{dy}{dx} = 5^x \ln 5$$

Dalam hal $y = e^x$ maka $\frac{dy}{dx} = e^x$ juga, sebab $\ln\ e = 1$

17. Diferensiasi Fungsi Komposit-Eksponensial

Jika $y = a^u$, di mana $u = g(x)$, maka $\frac{dy}{dx} = a^u \ln a \frac{du}{dx}$

Contoh : $y = 9^{3x^{1-4}}$

Misalkan $u = 3x^2 - 4 \rightarrow \frac{du}{dx} = 6x$

$$\frac{dy}{dx} = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 9^{3x^2-4}(\ln 9)(6x)$$

$$\frac{dy}{dx} = (6x)\ 9^{3x^2-4} \ln 9$$

Kasus khusus: dalam hal $y = e^u$, maka $e^u \frac{du}{dx}$

18. Diferensiasi Fungsi Kompleks

Jika $y = u^v$, di mana $u = g(x)$ dan $v = h(x)$,

Maka $\frac{dy}{dx} = vu^{v-1}.\frac{du}{dx} + u^n.\ln u\,.\frac{dv}{dx}$

Penentuan $\frac{dy}{dx}$ dari $y = u^v$ ini dapat pula dilakukan dengan jalan melogaritmakan fungsi atau persamaannya, kemudian mendiferensiasikan masing-masing ruasnya. Perhatikan :

$$y = u^v$$

$$\ln y = v\ \ln u$$

$$\frac{1}{y}\ \frac{dy}{dx} = v\frac{1}{u}\ \frac{du}{dx} + \ln u \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(v\frac{1}{u}\frac{dy}{dx}\ln u\frac{dv}{dx}\right)u^v \quad \text{mengingat } y = u^v$$

$$\frac{dy}{dx} = vu^{-1}.\frac{du}{dx} + u^v.\ln u\,.\frac{dv}{dx}$$

Contoh : $y = 4x^{x^3}$

Misalkan $u = 4x \rightarrow \frac{du}{dx} = 4$

$$v = x^3 \rightarrow \frac{dv}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = vu^{v-1}.\frac{du}{dx} + u^v.\ln u\,.\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = (x^3)4x^{x^3-1}(4) + 4x^{x^3}\ \ln 4x(\,3x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = 16x^{x^3+2} + 12x^{x^3+2}\ n\ 4x\ \ln 4x$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^{x^3+2}(4 + 3\ \ln 4x)$$

19. Diferensiasi Fungsi Balikan

Jika $y = f(x)$ dan $x = g(y)$ adalah fungsi-fungsi yang paling berbalikan (inverse functions), maka $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy}$

Contoh : $x = 5y + 0{,}5y^4$

$$\frac{dy}{dx} = 5 + 2y^3 \qquad \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{5 + 2y^3}$$

20. Diferensiasi Implisit

Jika $f(x, y) = 0$ merupakan fungsi implisit sejati (tidak memungkinkan dieksplisitkan), dy/dx dapat diperoleh dengan mengdiferensiasikannya suku demi suku, dengan menggap y sebagai fungsi dari x.

Contoh : $4xy^2 - x^2 + 2y = 0$, tentukan dy/dx !

$$8xy\ \frac{dy}{dx} + 4y^2 - 2x + 2\ \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(8xy + 2)\frac{dy}{dx} = 2x - ay^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 4y^2}{8xy + 2} = \frac{x - 2y^2}{4xy + 1}$$

6.4 Hubungan Fungsi dan Derivatifnya

Dengan mengetahui besarnya harga dari turunan pertama (first derivative) dan turunan kedua (second derivative) sebuah fungsi, akan dapat dikenali untuk gambar dari fungsi tersebut. Secara berurutan seksi-seksi berikut akan membahas:

1. Hubungan antara fungsi non-linier dan derifatif pertamanya.

   Guna mengetahui apakah kurvanya menaik ataukah menurun pada kedudukan tertentu.
2. Hubungan antara fungsi parabolik dan deivatifnya

   Guna mengetahui letak dan bentuk titik ekstrimnya (maksimum dan minimumnya)
3. Hubungan antra fungsi kubik dan dan derivatifnya

   Guna mengetahui letak dan titik bentuk ekstrim serta titik beloknya.

Contoh:

$y \quad = f(x) = 1/3\, x^3 - 4x^2 + 12x - 5$ ……..… Fungsi Kubik

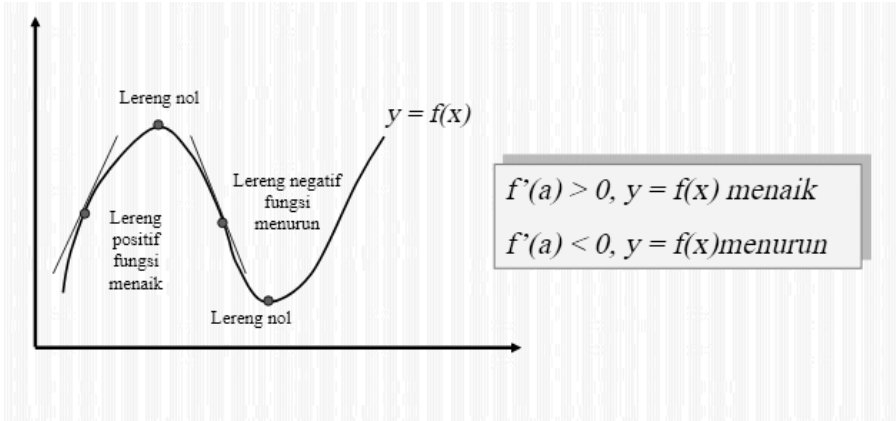
$y' \; = dy/dx = x^2 - 8x + 12$ …….. Fungsi Kuadrat

$y'' \; = d^2y/dx^2 = 2x - 8$ ……..... Fungsi Linear

$y''' = \; d^3y/dx^3 = 2$ ……..…… Konstanta

(Perhatikan pengurangan derajat fungsi pada masing-masing turunannya).

A. Fungsi Menaik dan Fungsi Menurun



Jika derivatif pertama $f'(a) > 0$ (lereng kurvanya positif pada $x = a$) maka $y = f(x)$ merupakan fungsi menaik pada kedudukan $x = a$; yakni $y = f(x)$ menaik manakala x bertambah sesudah $x = a$. Sedangkan jika derivatif pertama $f'(a) < 0$ (lereng kurvanya negative pada $x = a$) maka $y = f(x)$ merupakan fungsi menurun pada kedudukan $x = a$; yakni $y = f(x)$ menurun manakala x bertambah sesudah $x = a$.

Uji Tanda. Apabila derivative pertama $f'(x) = 0$, berarti $y = f(x)$ berada di titik ekstrimnya.

Titik Ekstrim Maksimum : $f'(x) > 0$ untuk $x < a$ dan $f'(x) < 0$ untuk $x > a$.

Titik Ekstrim Minimum : $f'(x) < 0$ untuk $x < a$ dan $f'(x) > 0$ untuk $x > a$.

Contoh :

1. Tentukan apakah $y = f(x) = 1/3x^3 - 4x^2 + 12x - 5$ merupakan fungsi menaik ataukah menurun pada $x = 5$, $x = 7$ dan $x = 6$.

   $f'(x) = x^2 - 8x + 12$

→ $f'(5) = 5^2 - 8(5) + 12 = -3 < 0$, berarti fungsi menurun pada $x = 5$.

→ $f'(7) = 7^2 - 8(7) + 12 = 5 > 0$, berarti fungsi menaik pada $x = 7$.

→ $f'(6) = 6^2 - 8(6) + 12 = 0$, berarti berada di titik ekstrim pada $x = 6$ ini adalah titik minimum.

B. Titik Ekstrim Fungsi Parabolik

$y = f(x) = x^2 - 8x + 12$ …… Fungsi Parabolik

$y' = f'(x) = dy/dx = 2x - 8$ …..……. Fungsi Linear

$y'' = f''(x) = d^2y/dx^2 = 2$ …… Konstanta

Jadi, :

- Parabola : $y = f(x)$ mencapai titik ekstrim pada $y' = 0$

→ jika $y'' < 0$: bentuk parabolanya terbuka ke bawah, titik ekstrimnya adalah titik maksimum.

→ jika $y'' > 0$: bentuk parabolanya terbuka ke atas, titik ekstrimnya adalah titik minimum

Contoh :

1. Andaikan $y = -x^2 + 6x - 2$

   Maka $y' = -2x + 6$

   $y'' = -2 < 0$

   → Karena $y'' < 0$ maka bentuk parabolanya terbuka ke bawah, titik ekstrimnya adalah titik maksimum.

   → Koordinat titik maksimum :

   Syarat y maksimum : $y' = 0 \rightarrow -2x + 6 = 0, x = 3$

   Untuk $x = 3 \rightarrow y = -(3)^2 + 6(3) - 2 = 7$

C. Titik Ekstrim dan Titik Belok Fungsi Kubik

$y = 1/3x^3 - 3x^2 + 8x - 3$ …… Fungsi Kubik

$y' = x^2 - 6x + 8$ …..……. Fungsi Kuadrat Parabola

$y'' = 2x - 6$ ……..…..… Fungsi Linear

Jadi, :

- Fungsi Kubik : $y = f(x)$ mencapai titik ekstrim pada $y' = 0$

→ jika $y'' < 0$ pada $y' = 0$,maka titik ekstrimnya adalah titik maksimum.

→ jika $y'' > 0$ pada $y' = 0$, maka titik ekstrimnya adalah titik minimum

- Fungsi Kubik : $y = f(x)$ berada di titik belok pada $y' = 0$

Contoh :

1. Tentukan titik ekstrim dan titik belok fungsi kubik

   $y = -x^3 + 15x^2 - 48x$

   Jawab :

   $y = -x^3 + 15x^2 - 48x \rightarrow y' = -3x^2 + 30x - 48$

   $\rightarrow y'' = -6x + 30$

   - Syarat y ekstrim : $y' = 0,\ -3x^2 + 30x - 48 = 0$

     $x_1 = 2$ dan $x_2 = 8$

     $x = 2 \rightarrow y = -8 + 60 - 96 = -44$

     $y'' = -12 + 30 = 18 > 0$ } Minimum (2,-44)

     $x = 8 \rightarrow y = -512 + 960 - 384 = 64$

     $y'' = -48 + 30 = -18 < 0$ } Maksimum (8,64)

   - Syarat titik belok : $y'' = 0, -6x + 30 = 0$, $x = 5$

     $x = 5 \rightarrow y = -125 + 375 - 240 = 10$ } Titik Belok (5,10)

6.5 Latihan Soal

1. Carilah $f'(x)$ jika $f(x) = 3x^2 + 7x$

   Jawab :

   $f'(x) = u' + v'$

$f'(x) = 6x + 7$

2. Andaikan $y = 3x^2 - 4x + 5$ dan ingin diketahui serta dibandingkan nilai dy dan nilai Δy untuk $\Delta x = 0{,}0001$ dari kedudukan $x = 2$.

$\frac{dy}{dx} = 6x - 4 = 6(2) - 4 = 8 \qquad dy = \frac{dy}{dx}\Delta x = 8(0{,}0001) = 0{,}0008$

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

$= 3(x + \Delta x)^2 - 4(x + \Delta x) + 5 - (3x^2 - 4x + 5)$

$= 3(2 + 0{,}0001)^2 - 4(2 + 0{,}0001) + 5 - 3(2)^2 + 4(2) - 5$

$= 0{,}0008$

Dalam contoh ini, untuk $x = 2$ dan $\Delta x = 0{,}0001$ ternyata $dy = \Delta y = 0{,}0008$, konsekuensinya $\frac{dy}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 8$, berarti lereng taksirannya persis sama dengan lereng yang sesungguhnya.

BAB VII

APLIKASI DEFERENSIAL SEDERHANA DALAM EKONOMI

7.1 Elastisitas Permintaan, Penawaran dan Produksi

Elastisitas dari suatu fungsi *y = f(x)* berkenaan dengan *x* dapat didefinisikan sebagai :

$$\eta = \frac{Ey}{Ex} = \lim_{\Delta x \to 0} \quad \frac{\Delta y/y}{\Delta x/x} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}$$

Ini berarti bahwa elastisitas *y = f(x)* merupakan limit dari rasio antara perubahan relatif dalam y terhadap perubahan relatif dalam x, untuk perubahan x yang sangat kecil atau mendekati nol. Dengan terminologi lain, elastisitas y terhadap x dapat juga dikatakan sebagai rasio antara persentase.

A. Elastisitas Permintaan

Elasisitas permintaan ialah suatu koefisien yang menjelaskan besarnya perubahan jumlah barang yang diminta akibat adanya perubahan harga. Jadi, merupakan rasio antara persentase perubahan jumlah barang yang diminta terhadap persentase perubahan harga. Jika fungsi permintaan dinyatakan dengan $Q_d = f(P)$, maka elastisitas permintaannya :

$$\eta d = \frac{\%\Delta Qd}{\%\Delta P} = \frac{EQd}{EP} = \lim_{\Delta P \Delta \to 0} \quad \frac{(\Delta Qd/Qd)}{(\Delta P/P)} = \frac{dQd}{dP} \cdot \frac{P}{Qd}$$

dimana dQ_d tak lain adalah Q'_d atau f'(P)

Permintaan akan suatu barang dikatakan bersifat elastic apabila $|\eta d| < 1$. Barang yang permintaannya elastis mengisyaratkan bahwa jika harga barang tersebut beubah sebesar persentase tertentu, maka permintaan terhadapnya akan berubah (Secara berlawanan arah) dengan persentase yang lebih besar daripada persentase perubahan harganya.

Contoh:

Pada saat harga Rp400,00 jumlah barang yang diminta 30 unit, kemudian

harga turun menjadi Rp360,00 jumlah barang yang diminta 60 unit. Hitunglah besar koefisien elastisitasnya!

Penyelesaian:

$E_d = \frac{30}{40} \times \frac{400}{30}$

$E_d = \frac{400}{40}$

$Ed = 10$ (elastis)

B. Elastisitas Penawaran

Elastisitas penawaran (istilahnya yang lengkap : elastisitas harga penawaran, price elasticity of supply) ialah suatu koefisien yang menjelaskan besarnya perubahan jumlah barang yang ditawarkan berkenaan adanya perubahan harga. Jadi, merupakan rasio antara persentase perubahan jumlah barang yang ditawarkan terhadap persentase perubahan harga. Jika fungsi penawaran dinyatakan dengan Qs = f(P), maka elastisitas penawarannya :

$$\eta s = \frac{\%\Delta Qs}{\%\Delta P} = \frac{EQs}{EP} = \lim_{\Delta P \to 0} \quad \frac{(\Delta Qs/Qs)}{(\Delta P/P)} = \frac{dQd}{dP} \cdot \frac{P}{Qs}$$

Penawaran suatu barang dikatakan bersifat elastic apabila ηs > 1, elastic uniter jika ηs = 1 dan inelastic bila ηs < 1. Barang yang penawarannya inelastic mengisyaratkan bahwa jika harga barang tersebut berubah sebesar persentase tertentu, maka penawarannya berubah (secara searah) dengan persentase yang lebih kecil daripada persentase perubahan harganya.

Contoh:
Pada saat harga Rp500,00 jumlah barang yang ditawarkan 40 unit, kemudian harga turun menjadi Rp300,00 jumlah barang yang ditawarkan 32 unit. Hitunglah besarnya koefisien elastisitas penawarannya.

Jawab:

$E_s = \frac{8}{200} \times \frac{500}{40}$

$E_s = \frac{4000}{8000}$

$E_s = 0{,}5$ (inelastis)

C. Elastisitas Produksi

Elastisitas produksi ialah suatu koefisien yang menjelaskan besarnya perubahan jumlah keluaran (output) yang dihasilkan akibat adanya perubahan jumlah masukan (input) yang digunakan. Jadi, merupakan rasio antara persentase perubahan jumlah keluaran terhadap persentase perubahan jumlah masukan. Jika P melambangkan jumlah produk yang dihasilkan sedangkan X melambangkan jumlah faktor produksi yang digunakan, dan fungsi produksi dinyatakan dengan P = f(X), maka elastisitas produksinya :

$$\eta p = \frac{\%\Delta P}{\%\Delta X} = \frac{EP}{EX} = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{(\Delta P/P)}{(\Delta X/X)} = \frac{dP}{dX} \cdot \frac{X}{P}$$

Dimana dP/dX adalah produk marjinal dari X [P' atau f'(X)].

7.2 Konsep Nilai Marjinal dan Nilai Ekstrim (Max atau Min) Pada Fungsi Biaya, Penerimaan, Utilitas dan Produksi

A. Biaya Marjinal

Biaya marjinal (marginal cost, MC) ialah biaya tambahan yang dikeluarkan untuk menghasilkan satu unit tambahan produk. Secara matematik, fungsi biaya marginal merupakan derivative pertama dari fungsi biaya total. Jika fungsi biaya total dinyatakan dengan C = f(Q)

dimana C adalah biaya total dan Q melambangkan jumlah produk, maka biaya marjinalnya :

MC = C' = $\frac{dC}{dQ}$

Contoh:

Biaya total : $C = f(Q) = Q^3 - 3Q^2 + 4Q + 4$

Biaya marjinal: $MC = C' = \frac{dC}{dQ} = 3Q^2 - 6Q + 4$

Penyelesaian:

$C = Q3 - 3Q^2 + 4Q + 4$

$MC = C' = 3Q^2 - 6Q + 4$

$(MC) = C'' = 6Q - 6$

MC minimum jika (MC)' $= 0$

$(MC)' = 0$

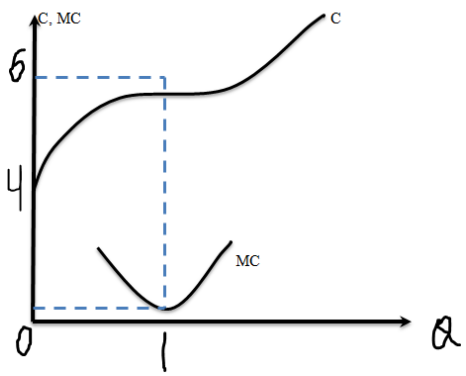
$6Q - 6 = 0$

$Q = 1$

$Pada\ Q = 1$

$MC = 3(1)2 - 6(1) + 4 = 1$

$C = 12 - 3(1)2 + 4(1) + 4 = 6$



B. Penerimaan Marjinal (MR)

Penerimaan tambahan yang diperoleh berkenaan bertambahnya satu unit keluaran yang diproduksi atau terjual. Secara matematik fungsi penerimaan marginal merupakan turunan pertama dari fungsi penerimaan total. Jika fungsi penerimaan total dinyatakan dengan R = f(Q) dimana R adalah penerimaan total dan Q melambangkan jumlah keluaran, maka penerimaan marginalnya:

$$MR = R' = \frac{dR}{dQ}$$

Contoh:

Fungsi permintaan akan suatu barang tunjukkan oleh $P = 16 - 2Q$ maka tentukan P , R dan MR.

Penyelesaian:

- Penerimaan total:

  $$R = P \times Q = f(Q)$$
  $$R = 16Q - 2Q^2$$

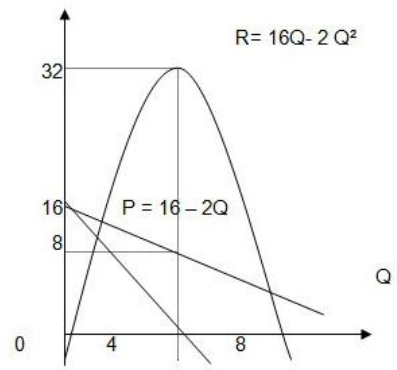
- Penerimaan marginal :

  $$MR = R = 16 - 4Q$$

Pada MR = 0 , Q = 4

$P = 16 - 2(4) = 8$

$R = 16(4) - 2(4)2 = 32$



C. Utilitas Marginal

Adalah utilitas tambahan yang diperoleh konsumen berkenaan bertambahnya satu unit barang yang dikonsumsinya. Secara matematik fungsi utilitas marginal merupakan turunan pertama dari fungsi total. Jika fungsi utilitas total dinyatakan degan U = f(Q) dimana U adalah utilitas total dan Q melambangkan jumlah barang yang dikomsumsi, maka utilitas marginalnya:

$$MU = U' = \frac{dU}{dQ}$$

Contoh:

$U = f(Q) = 90Q - 5Q2$

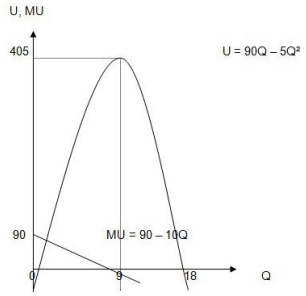
$U\ maks = 90(9) - 5(9)2$

$MU = U' = 90 - 10Q$

$MU = U' = 810 - 405$

U maksimum pada MU $= 0$ yaitu 405

$MU = 0, Q = 9$



D. Produk Marjinal

Produk Marjinal (MP) adalah produk tambahan yang dihasilkan dari satu unit tambahan factor produksi yang digunakan.Jika diuraikan secara matematik, MP adalah derivative pertama dari fungsi produk total.

Jika $P = F(X)$Fungsi Produk Total

Maka $MP = P' = \frac{dp}{dx}$

Contoh:

Fungsi produksi total adalah $P = (fx) = 9\,x^2 - x^3$.Maka, produk marjinalnya adalah $MP = P' = 18x - 3x^2$.

P maksium pada $P' = 0$,yakni pada $X = 6$,dengan $P_{maksimum} = 108$. P berada di titik belok dan MP maksimum pada $P'' = (MP)' = 0$, yakni pada $X = 3$.

7.3 Analisis Keuntungan Maksimum

Keuntungan maksimum atau kereugian maksimum,dapat disidik dengan pendekatan diferensiasi pula.Karena penerimaan total (R) maupun biaya total (C) merupakan fungsi dari keluaran jumlah yang duhasilkan atau terjual (Q),Dengan konsep ini kita dapat menentukan fungsi baru yaitu fungsi

keuntungan (π) dengan cara menetapkan derivative pertamanya sama dengan nol.

$R = r(Q)$

$C = c(Q)$

$\pi = R - C = r(Q) - c(Q) = f(Q)$

π optimum jika $\pi' = f'(Q) = \frac{d\pi}{dQ}$

Karena pada saat π optimum $= \pi' = R'(Q) - C'(Q) = MR = MC$, maka pada π optimum:

$$\pi' = 0 \rightarrow MR - MC = 0 \rightarrow MR = MC$$

Jika diuraikan secara grafik, kedudukan $\pi' = 0$ atau $\mathrm{MR} = \mathrm{MC}$ pada kurva adalah perpotongan antara kurva MR dan MC. Hal ini sekaligus mencerminkan jarak terlebar antara kurva R dan C.

Akan tetapi syarat MR = MC tidak cukup jika hanya digunakan untuk menentukan keutungan maksimum, sebab jarak terlebar yang dicerminkan mungkin dapat berupa "R-C" bernilai positif (keuntungan) atau merupakan "R-C" bernilai negatif (kerugian). Untuk menentukan apakah $\pi' = 0$ atau $\mathrm{MR} = \mathrm{MC}$ mencerminkan keutungan atau kerugian dapat diuji dengan derivative kedua dari fungsi π atau $\pi'' = 0$.

$\Pi = R - C = f(Q)$

Π optimum jika $\pi' = 0$ atau $MR = MC$

Jika $\pi'' < 0 \rightarrow \Pi$ maksimum = Keuntungan maksimum

Jika $\pi'' > 0 \rightarrow \Pi$ minimum = kerugian maksimum

Contoh:

$R = r(Q) = -2Q^2 + 1000Q$

$C = c(Q) = Q^3 - 59Q^2 - 315Q - 2000$

Maka

$\pi = R - C$

$\pi = -Q^3 + 57Q^2 - 315Q - 2000$

$\pi' = -3Q^2 + 114Q - 315$

Agar keuntungan maksimum:

- $\pi' = 0$

$-3Q^2 + 114Q - 315 = 0$

$-Q^2 + 38Q - 105 = 0$

$(-Q + 3)(Q - 35) = 0$

Diperoleh $Q_1 = 3$ dan $Q_2 = 35$

- $\pi" = -6Q + 114$

Jika $Q = 3$, maka $\pi" = 96 > 0$

Jika $Q = 35$, maka $\pi" = -96 < 0$

Karena $\pi" = < 0$ pada tingkat produksi $Q = 35$, maka tingkat produksi yang menghasilkan keuntungan maksimum adalah $Q = 35$, sedangkan tingkat produksi $Q = 3$ akan berdampak kerugian maksimum.

Keuntungan maksimum:

$\pi = -(35)3 + 57(35)2 - 315(35) - 2000$

$\pi = 13.925$

7.4 Penerimaan Pajak Maksimum

Sebelumnya Diketahui persamaan $P = a + bQ$, dan pemerintah mengenakan pajak spesifik sebesar t atas setiap unit barang yang dijual, maka penawaran sesudah pajak:

$t = P - a - bQ$

Apabila fungsi permintaan barang dicerminkan oleh $P = c - dQ$

maka menjadi: $t = c - dQ - a - bQ = (c - a) - (d + b)\,Q$

Pajak total yang diterima pemerintah adalah besarnya pajak per unit dikalikan jumlah barang yang terjual dipasar (jumlah keseimbangan) sesudah pengenaan pajak tersebut.

$T = t.Q = (c - a)Q - (d + b)Q^2$

Berdasarkan bentuk persamaan terakhir yang kuadrat parabolik II, kita dapat menentukan pada tingkat keterjualan berapa unit barang Q pemerintah akan memperoleh penerimaan maksimum dari rencana pajak spesifik yang akan dikenakannya.

Pajak total yang diterima pemerintah : $T = t(Q) = (c - a)Q - (d + b)Q^2$

T maksimum jika $T' = 0$, yakni pada $Q = (c - a)$ atau $2(d + b)$

7.5 Efek Pemajakan bagi Penunggal

Selain pendapatan Negara pajak berfungsi pula sebagai instrument kendali atas keuntungan "berlebihan" yang dapat dikeduk oleh penunggal atau monopolis. Pengenaan pajak sebesar t per unit barang yang diproduksi atau yang dijual oleh penunggal akan mengakibatkan biaya rata-rata sebesar , dan biaya total meningkat sebesar tQ. Akibatnya bukan saja harga menjadi mahal tetapi juga keuntungan penunggal menjadi berkurang.

Penerimaan total: $R = r(Q)$

Biaya total: $C = c(Q)$

Keuntungan: $\pi = R - C$

$\pi = r(Q) - c(Q)$

Biaya total sesudah pengenaan pajak : $C = c(Q) + t\,Q$

Keuntungan sesudah pengenaan pajak : $\pi = r(Q) - c(Q) - tQ$

Pajak per unit yaitu t

Pajak total yaitu $T = t.Q = f(t, Q)$

BAB VIII

DEFERENSIAL MULTIVARIABEL

8.1 Diferensial Parsial

Diferensial Parsial adalah suatu persamaan yang melibatkan fungsi dua peubah atau lebih dan turunan atau diferensialnya, yang dalam matematika diartikan sebagai suatu hubungan yang mengaitkan suatu fungsi yang tidak diketahui, yang merupakan fungsi dari beberapa variabel bebas, dengan turunan-turunannya melalui variabel-variabel yang dimaksud.

Differensial Parsial mengandung sejumlah tertentu turunan dari paling tidak satu variabel tak bebas terhadap lebih dari satu variabel bebas.

$\frac{\partial f}{\partial x}$ adalah turunan fungsi $f(x,y)$ terhadap x dengan memperlakukan y sebagai suatu tetapan, yang disebut turunan parsial fungsi $f(x,y)$terhadap x.

$\frac{\partial f}{\partial y}$ adalah turunan fungsi $f(x,y)$ terhadap x dengan memperlakukan y sebagai suatu tetapan, yang disebut turunan parsial fungsi $f(x,y)$terhadap y.

Maka :

- $y = f(x,z)$

b. $fx(x,z) = \frac{\partial y}{\partial x}$

c. $fz(x,z) = \frac{\partial y}{\partial z}$

p'

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x}dx + \frac{\partial y}{\partial z}\ dz$$

- $P = f(q,r,s)$

a. $fq\ (q,r,s) = \frac{\partial p}{\partial q}$

b. $fr\ (q,r,s) = \frac{\partial p}{\partial r}$

y'

c. $fs\ (q,r,s) = \frac{\partial p}{\partial s}$

$$dp = \frac{\partial p}{\partial q}dq + \frac{\partial p}{\partial r}\ dr + \frac{\partial p}{\partial s}\ ds$$

Contoh : $y = x^3 + 5z^2 - 4x^2z - 6xz^2 + 8z - 7$

(1) $\frac{\partial\, y}{\partial\, x} = 3x^2 - 8xz - 6z^2$

(2) $\frac{\partial\, y}{\partial\, z} = 10z - 4x^2 - 12xz + 8$

$dy = \frac{\partial\, y}{\partial\, x}dx + \frac{\partial\, y}{\partial\, z}dz$

$dy = (3x^2 - 8xz - 6z^2)dx + (10z - 4x^2 - 12xz + 8)dz$

8.2 Derivatif dari Derivatif Parsial

Derivatif dari derivatif parsial seperti halnya dengan fungsi dengan satu variable bebas maka fungsi yang memiliki lebih dari satu variabel bebas pun dapat diturunkan lebih daru satu kali. Dengan kata lain masing-masing parsialnya masih mungkin diturunkan lagi, namun beberapa banyak turunan dari turunan parsial dapat dibentuk tergantung dari bentuk parsial tersebut.

Contoh :

$y = x^3 + 5z^2 - 4x^2z - 6xz^2 + 8z - 7$

(1) $\frac{\partial\, y}{\partial\, x} = 3x^2 - 8xz - 6z^2$

(2) $\frac{\partial\, y}{\partial\, z} = 10z - 4x^2 - 12xz + 8$

Dalam contoh ini baik $\partial y/\partial x$ maupun $\partial y/\partial x$ masih dapat di turunkan secara parsial lagi baik terhadap x maupun terhadap z.

(1a) $\frac{\partial y}{\partial x}$ terhadap x : $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 6x - 8z$

(1b) $\frac{\partial y}{\partial x}$ terhadap z: $\frac{\partial^2 y}{\partial x\, \partial y} = -8x - 12z$

(2a) $\frac{\partial y}{\partial z}$ terhadap x: $\frac{\partial^2 y}{\partial z\, \partial x} = -8x - 12z$

(2b) $\frac{\partial y}{\partial z}$ terhadap z: $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = 10 - 12x$

Ternyata turunan parsial kedua (1a), (1b), (2a) dan (2b) masih dapat di turunkan secara parsial lagi baik terhadap x maupun terhadap z.

(1a.1) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ terhadap x : $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 6$

(1a.2) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ terhadap z : $\frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial z} = -8$

(1b.1) $\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z}$ terhadap x : $\frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial z} = -8$

(1b.2) $\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z}$ terhadap z : $\frac{\partial^3 y}{\partial x\, \partial z^2} = -12$

(2a.1) $\frac{\partial^2 y}{\partial z \partial x}$ terhadap x : $\frac{\partial^3 y}{\partial z\, \partial x^2} = -8$

(2a.2) $\frac{\partial^2 y}{\partial z \partial x}$ terhadap z : $\frac{\partial^3 y}{\partial z^2\, \partial x} = -12$

(2b.1) $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}$ terhadap x : $\frac{\partial^3 y}{\partial z^2\, \partial x} = -12$

(2b.2) $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}$ terhadap x : $\frac{\partial^3 y}{\partial z^3} = 0$

Sekarang turunan parsial ketiga ini tidak dapat lagi diturunkan secara parsial, karenan masing masing hanya tinggal mengandung konstanta.

8.3 Nilai Ekstrim (Max dan Min)

Nilai –nilai ekstrim dari sebuah fungsi yang mengandung lebih dari satu variabel bebas dapat dicari dengan dengan derivatif keduanya :
Untuk $y = f(x)$ maka y akan mencapai titik ekstrimnya jika;

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \text{ dan } \frac{\partial y}{\partial z} = 0$$

Untuk mengetahui apakah titik ekstrimnya berupa titik maksimum atau titik minimum maka dibutuhkan syarat :
Maksimum bila : $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} < 0$ dan $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} < 0$

Minimum bila : $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} > 0$ dan $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} > 0$

Contoh :

1. Tentukan apakah titik ekstrim dari fungsi di bawah ini merupakan titik maksimum atau minimum :

$y = -x^2 + 12x - z^2 + 10z - 45$

$\frac{\partial y}{\partial x} = -2x + 12$

$-2x + 12 = 0, \quad x = 6$

$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} < -2$ (Maksimum)

$\frac{\partial y}{\partial z} = -2z + 10$

$-2z + 10 = 0, \quad z = 5$

$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} < -2$ (Maksimum)

$y = -(6)^2 + 12(6) - (5)^2 + 10(5) - 45$

$y_{maks} = -36 + 72 - 25 + 50 - 45 = 16$

8.4 Optimasi Bersyarat (Metode Lagrange)

Pengganda Lagrange adalah metode penyelesaian menghitung nilai ekstrim suatu fungsi yang mengahadapi kendala berupa fungsi lain. Caranya dengan membentuk fungsi baru yang disebut fungsi Lagrange yang merupakan penjumlahan fungsi yang hendak dioptimumkan ditambah hasil kali pengganda Lagrange λ dengan fungsi kendalanya.

Misalkan hendak dioptimumkan $z = f(x, y)$ dengan syarat harus terpenuhi $u = g(x, y)$ maka fungsi Lagrangenya :

$F = (x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\, g(x, y)$

Nilai ekstrim$F(x, y, \lambda)$ dapat dicari dengan memformulasikan masing-masing derivatif parsial pertama = 0

$F_x(x, y, \lambda) = f_x + \lambda g_x = 0$

$F_y(x, y, \lambda) = f_y + \lambda g_y = 0$

Untuk mengetahui jenis nilai ekstrimnya, maksimum atau minimum maka syaratnya adalah :

Maksimum bila $F_{xx} < 0$ dan $F_{yy} < 0$

Minimum bila $F_{xx} > 0$ dan $F_{yy} > 0$

Contoh :

1. Tentukan nilai ekstrim z dari fungsi $z = 2x + 2y$ dengan syarat $x^2 + y^2 = 8$ Jelaskan jenis nilai ekstrimnya.
   Jawab:
   Fungsi Lagrange: $F = 2x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 8)$
   $2x + 2y + \lambda x^2 + \lambda y^2 - 8\lambda$
   Agar F ekstrim, $F' = 0$.
   $F_x = 2 + 2\lambda x = 0$, diperoleh $\lambda = -\frac{1}{x}$ …….. (1)
   $F_y = 2 + 2\lambda y = 0$, diperoleh $\lambda = -\frac{1}{y}$ …….. (2)

   Berdasarkan (1) dan (2) : $-\frac{1}{x} = -\frac{1}{y}$, atau $x = y$
   Menurut fungsi kendala : $x^2 + y^2 = 8$
   $y^2 + y^2 = 8$
   $2y^2 = 8$
   $y^2 = 4, y = \pm 2$
   Karena $y = \pm 2$, $x = \pm 2$
   $z = 2x + 2y = \pm 8$
   Jadi nilai ekstrim $z = \pm 8$

   Penyidikan nilai ekstrim :
   → Untuk $x = 2$ dan $y = 2$, $\lambda = -\frac{1}{2}$
   $F_{xx} = 2\lambda = -1 < 0$
   $F_{xy} = 2\lambda = -1 < 0$
   Karena F_{xx} dan $F_{xy} < 0$, nilai ekstrimnya adalah nilai maksimum dengan $Z_{maks} = 8$

   → Untuk $x = -2$ dan $y = -2$, $\lambda = \frac{1}{2}$
   $F_{xx} = 2\lambda = 1 > 0$
   $F_{xy} = 2\lambda = 1 > 0$
   Karena F_{xx} dan $F_{xy} > 0$, nilai ekstrimnya adalah nilai minimum dengan $Z_{min} = -8$

2. Optimumkan $z = xy$ dengan syarat $x + 2y = 10$.
   $F = xy + \lambda(x + 2y - 10)$
   $= xy + \lambda x + 2\lambda y - 10\lambda$

   Syarat yang diperlukan agar F optimum, $F' = 0$
   $F_x = y + \lambda = 0$, diperoleh $\lambda = -y$

$F_y = x + 2\lambda = 0$, diperoleh $\lambda = -\frac{1}{2}$

$-y = -\frac{1}{2}x$, berarti $2y = x$

$x + 2y = 10$

$2y + 2y = 10$, diperoleh $y = 2{,}5$ dan $x = 5$.

Jadi, z optimum pada $x = 5$ dan $y = 2{,}5$;

dengan $z_{opt.} = xy = (5)(2{,}5) = 12{,}5$

8.5 Latihan Soal

1. Tentukan apakah titik ekstrim dari fungsi di bawah ini merupakan titik maksimum atau minimum :

$$y = -x^2 + 12x - z^2 + 10z - 45$$

$\frac{\partial y}{\partial x} = -2x + 12$

$-2x + 12 = 0, \quad x = 6$

$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} < -2$ (Maksimum)

$\frac{\partial y}{\partial z} = -2z + 10$

$-2z + 10 = 0, \quad z = 5$

$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} < -2$ (Maksimum)

$$y = -(6)^2 + 12(6) - (5)^2 + 10(5) - 45$$

$$y_{maks} = -36 + 72 - 25 + 50 - 45 = 16$$

BAB IX

APLIKASI DEFERENSIAL MULTIVARIABEL DALAM EKONOMI

9.1 Permintaan Marjinal dan Elastisitas Permintaan Parsial

A. Permintaan Marjinal

Apabila dua macam barang mempunyai hubungan dalam penggunaannya, maka permintaan akan masing-masing barang akan fungsional terhadap harga kedua macam barang tersebut. Maka ;

$$Q_{da} = f(P_a, P_b) \text{ dan } Q_{db} = f(P_a, P_b)$$

Derivatif pertama dari Q_{da} dan Q_{db} adalah fungsi-fungsi permintaan marjinalnya, di mana:

$\frac{\partial Q_{da}}{\partial P_a}$ adalah permintaan marjinal akan A berkenaan dengan P_a.

$\frac{\partial Q_{da}}{\partial P_b}$ adalah permintaan marjinal akan A berkenaan dengan P_b.

$\frac{\partial Q_{db}}{\partial P_a}$ adalah permintaan marjinal akan B berkenaan dengan P_a.

$\frac{\partial Q_{db}}{\partial P_b}$ adalah permintaan marjinal akan B berkenaan dengan P_b.

Untuk U = konstanta tertentu, fungsi utilitas $U = f(x, y)$ merupakan suatu persamaan kurva indiferensi (*indifference curve*), yaitu kurva yang menunjukkan berbagai kombinasi konsumsi barang X dan Y yang memberikan tingkat-tingkat kepuasaan yang sama.

B. Elastisitas Permintaan Parsial

Dengan dapat diturunkannya fungsi permintaan marjinal tersebut, dapatlah dihitung elastisitas permintaan parsialnya. Dalam hal ini terdapat dua

macam elastisitas permintaan, yaitu elastisitas yang mengukur kepekaan perubahan permintaan suatu barang berkenaan perubahan harga barang itu sendiri (elastisitas harga-permintaan), dan elastisitas yang mengukur kepekaan perubahan permintaan suatu barang berkenaan perubahan harga barang lain (elastisitas silang-permintaan).

$$\eta_{da} = \frac{\%\,\Delta\, Q_{da}}{\%\,\Delta\, P_a} = \frac{\mathrm{E}\, Q_{da}}{\mathrm{E}\, P_a} = \frac{\partial\, Q_{da}}{\partial\, P_a} \cdot \frac{P_a}{Q_{da}}$$

$$\eta_{db} = \frac{\%\,\Delta\, Q_{db}}{\%\,\Delta\, P_b} = \frac{\mathrm{E}\, Q_{db}}{\mathrm{E}\, P_b} = \frac{\partial\, Q_{db}}{\partial\, P_b} \cdot \frac{P_b}{Q_{db}}$$

$$\eta_{ab} = \frac{\%\,\Delta\, Q_{da}}{\%\,\Delta\, P_b} = \frac{\mathrm{E}\, Q_{da}}{\mathrm{E}\, P_b} = \frac{\partial\, Q_{da}}{\partial\, P_b} \cdot \frac{P_b}{Q_{da}}$$

$$\eta_{ba} = \frac{\%\,\Delta\, Q_{db}}{\%\,\Delta\, P_a} = \frac{\mathrm{E}\, Q_{db}}{\mathrm{E}\, P_a} = \frac{\partial\, Q_{db}}{\partial\, P_a} \cdot \frac{P_a}{Q_{db}}$$

η_{da} dan η_{db} keduanya merupakan elastisitas harga-permintaan. Sedangkan η_{ab} dan η_{ba} keduanya adalah elastisitas silang permintaan. Jika baik η_{ab} maupun riba keduanya negatif ($\eta_{ab} < 0$ dan $\eta_{ba} < 0$) untuk P_a dan P_b tertentu, berarti hubungan antara barang A dan barang B adalah komplementer atau saling melengkapi; sebab penurunan harga salah satu barang akan diikuti oleh kenaikan permintaan astas keduanya. Sedangkan jika baik η_{ab} maupun η_{ba}, keduanya positif ($\eta_{ab} > 0$ dan $\eta_{ba} > 0$) untuk P_a dan P_b tertentu, berarti hubungan antara barang A dan barang B adalah kompetitif/substitutif atau saling menggantikan; sebab penurunan harga salah satu barang akan diikuti oleh kenaikan permintaan atas barang tersebut dan penurunan permintaan atas barang lainnya.

Contoh:

Fungsi permintaan akan barang A dan barang B masing-masing ditunjukkan oleh $Q_{da} \,.\, P_a^2 . P_b^3 - 1 = 0$ dan $Q_{db} . P_a^3 . P_b - 1 = 0$.

Berapa elastisitas permintaan masing-masing barang dan bagaimana hubungan antara kedua barang tersebut?

Jawab:

$$Q_{da} \,.\, P_a^2 . P_b^3 - 1 = 0$$

$$Q_{da} = \frac{1}{P_a^2 . P_b^3}$$

$$Q_{da} = P_a^{-2} . P_b^{-3}$$

$$\frac{\partial\, Q_{da}}{\partial\, P_a} = -2P_a^{-3} . P_b^{-3}$$

$$\frac{\partial\, Q_{da}}{\partial\, P_b} = -3P_a^{-2} . P_b^{-4}$$

$$Q_{db} \,.\, P_a^3 . P_b - 1 = 0$$

$$Q_{db} = \frac{1}{P_a^3 . P_b}$$

$$Q_{db} = P_a^{-3} . P_b^{-1}$$

$$\frac{\partial\, Q_{db}}{\partial\, P_b} = -P_a^{-3} . P_b^{-2}$$

$$\frac{\partial\, Q_{db}}{\partial\, P_a} = -3P_a^{-4} . P_b^{-1}$$

$$\eta_{da} = \frac{\partial\, Q_{da}}{\partial\, P_a} . \frac{P_a}{Q_{da}} = -2P_a^{-3} . P_b^{-3} . \frac{P_a}{P_a^{-2} . P_b^{-3}} = -2$$

$$\eta_{db} = \frac{\partial\, Q_{db}}{\partial\, P_b} . \frac{P_b}{Q_{db}} = -P_a^{-3} . P_b^{-2} . \frac{P_b}{P_a^{-3} . P_b^{-1}} = -1$$

$$\eta_{ab} = \frac{\partial\, Q_{da}}{\partial\, P_b} . \frac{P_b}{Q_{da}} . -3P_a^{-2} . P_b^{-4} . \frac{P_b}{P_a^{-2} . P_b^{-3}} = -3$$

$$\eta_{ba} = \frac{\partial\, Q_{db}}{\partial\, P_a} . \frac{P_a}{Q_{db}} . -3P_a^{-4} . P_b^{-1} . \frac{P_a}{P_a^{-3} . P_b^{-1}} = -3$$

Hubungan antara kedua barang tersebut :

Barang A adalah barang elastis karena $\eta_{da} > 1$. Sedangkan B adalah barang elastis uniter karena $\eta_{db} = 1$. (menafsirkan elastisitas harga

permintaan cukup dengan melihat besar angka hasil perhitungan, tandanya tak perlu dihiraukan.

Adapun hubungan antara A dan B adalah bersifat komplementer karena $\eta_{ab} < 0$ dan $\eta_{ba} < 0$

9.2 Fungsi Biaya, Penerimaan, dan Laba, serta Penerimaan Pajak Maksimum

Andaikan sebuah perusahaan memproduksi dua macam barang, A dan B, di mana fungsi permintaan akan masing-masing barang dicerminkan oleh Q_a dan Q_b, serta biaya produksinya $C = f(Q_a, Q_b)$, maka:

Penerimaan dari memproduksi $A = R_a = Q_a . P_a = F(Q_a)$

Penerimaan dari memproduksi $B = R_b = Q_b . P_b = F(Q_b)$

Penerimaan Total : $R = R_a + R_b = f(Q_a) + f(Q_b)$

Dengan Biaya Total : $C = f(Q_a, Q_b)$

Fungsi Keuntungan : $\pi = R - C = f(Q_a) + f(Q_b) - f(Q_a, Q_b) = g(Q_a, Q_b)$

π maksimum bila $\pi' = 0$.

(1) $\pi_{Q_a} = \dfrac{\partial \pi}{\partial Q_a} = 0$

(2) $\pi_{Q_b} = \dfrac{\partial \pi}{\partial Q_b} = 0$

Contoh :

1. Biaya total yang dikeluarkan sebuah perusahaan yang memproduksi dua macam barang, A dan B, ditunjukkan oleh $C = {Q_a}^2 + 3{Q_b}^2 + Q_a . Q_b$. harga jual masing-masing barang per unit adalah $P_a = 7$ sedangkan $P_b = 20$. Hitunglah berapa unit masing-masing barang harus diproduksi agar keuntungannya maksimum dan besarnya keuntungan maksimum tersebut.

Jawab:

$$\left.\begin{array}{l} R_a = Q_a.P_a = 7\,Q_a \\ \\ R_b = Q_b.P_b = 20\,Q_b \end{array}\right\} \; R = R_a + R_b = 7Q_a + 20Q_b$$

$\pi = R - C = 7Q_a + 20Q_b - {Q_a}^2 + 3{Q_b}^2.Q_a.Q_b$

Agar π maksimum, $\pi' = 0$

(1) $\pi_{Q_a} = \frac{\partial \pi}{\partial Q_a} = 0 \qquad \rightarrow 7 - 2Q_a - Q_b = 0$

(2) $\pi_{Q_b} = \frac{\partial \pi}{\partial Q_b} = 0 \qquad \rightarrow 20 - 6Q_b - Q_a = 0$

Dari (1) dan (2) diperoleh $Q_a = 2$ dan $Q_b = 3$

π maksimum $= 7Q_a + 20Q_b - {Q_a}^2 + 3{Q_b}^2.Q_a.Q_b$

$= 7(2) + 20(3) - (2)^2 + 3(3)^2.(2)(3) = 37$

Jadi agar keuntungan maksimum, perusahaan harus memproduksi 2 unit *A* dan 3 unit *B* dengan keuntungan sebesar 37.

9.3 Utilitas Marjinal Parsial dan Keseimbangan Konsumsi

A. Utilitas Marjinal Parsial

Jika kepuasan konsumen dilambangkan dengan U dengan barang-barang yang dikonsumsinya dilambangkan dengan $q; (i = 1,2, \dots n)$, maka fungsi utilitas dapat dituliskan dengan notasi $U = f(q_1, q_2, q_3, \dots q_n)$. Seandainya untuk penyederhanaan dianggap bahwa seorang konsumen hanya mengkonsumsi dua macam barang, katakanlah X dan Y, maka fungsi utilitasnya adalah:

$$\boxed{U = f(x, y)}$$

Derivati pertama dari U merupakan utilitas marjinal parsialnya.

$\frac{\partial U}{\partial x}$ adalah utilitas marjinal berkenaan dengan barang X.

$\frac{\partial U}{\partial y}$ adalah utilitas marjinal berkenaan dengan barang Y.

Untuk $U =$ konstanta tertentu, fungsi utilitas $U = f(x, y)$ merupakan suatu persamaan kurva indiferensi (*indifference curve*) , yaitu kurva yang menunjukkan berbagai kombinasi konsumsi barang X dan Y, yang memberikan tingkat-tingkat kepuasan yang sama.

B. Keseimbangan Konsumsi

Keseimbangan Konsumsi maksudnya ialah suatu keadaan atau tingkat kombinasi konsumsi beberapa macam barang yang memberikan kepuasaan optimum. Secara geometri, keseimbangan konsumsi terjadi pada persinggungan kurva indiferensi dengan garis anggaran konsumen (budget line). Garis anggaran adalah garis yang mencerminkan kemampuan konsumen membeli berbagai macam barang berkenaan dengan harganya masing-masing dan pendapatan konsumen. Jika pendapatan konsumen berjumlah M serta harga barang X dan barang Y masing-masing P_x dan P_y per unit, persamaan budget line-nya dapat dituliskan dengan notasi $M = x.P_x + y.P_y$.

Tingkat kombinasi konsumsi yang memberikan kepuasan optimum atau keseimbangan konsumsi dapat dicari dengan Metode Lagrange. Dalam hal ini, fungsi utilitas $U = f(x, y)$ dimaksimumkan terhadap fungsi anggaran $M = x.P_x + y.P_y$. Analog dengan penyelesaian keseimbangan produksi sebagaimana diuraikan di bawah ini, diperoleh fungsi baru Lagrange:

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda(x.P_x + y.P_y - M)$$

Agar F maksimum:

$F_x(x, y) = 0 \rightarrow f_x(x, y) + \lambda P_x = 0$ ……. (1)

$F_y(x, y) = 0 \rightarrow f_y(x, y) + \lambda P_y = 0$ ……. (2)

Selanjutnya perhatikan:

Utilitas Total : $U = f(x, y)$

Utilitas Marjinal : $MU = U' = f'(x, y)$

(i) Utilitas marjinal barang X : $MU_x = f_x(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}$

(ii) Utilitas marjinal barang Y : $MU_y = f_y(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}$

Menurut (1) : $f_x(x, y) + \lambda P_x = 0 \rightarrow -\lambda = \frac{f_x(x,y)}{P_x}$

Menurut (2) : $f_y(x, y) + \lambda P_y = 0 \rightarrow -\lambda = \frac{f_y(x,y)}{P_y}$

Dari (1) dan (2), syarat keseimbangan konsumsi dapat juga dirumuskan:

$$\boxed{\begin{gathered} \frac{f_x(x, y)}{P_x} = \frac{f_y(x, y)}{P_y} \\ \frac{MU_x}{P_x} = \frac{MU_y}{P_y} \end{gathered}}$$

Jadi, bahwa keseimbangan konsumsi akan tercapai apabila hasilbagi utilitas marjinal masing-masing barang terhadap harganya bernilai sama.

Contoh :

1. Kepuasan seorang konsumen untuk mengkonsumsi barang X dan Y dicerminkan dengan fungsi utilitas $U = x^2y^3$. Jumlah pendapatan konsumen Rp. 1.000, harga X dan Y masing-masing per unit adalah Rp. 25 dan Rp. 50.
   a. Bentuklah fungsi utilitas marginal untuk masing-masing barang.

b. Berapa utilitas marginal tersebut jika konsumen mengkonsumsi 14 unit X dan 13 unit Y ?

c. Jelaskan apakah dengan mengkonsumsi 14 unit X dan 13 unit Y kepuasan konsumen optimum atau tidak.

Jawab :

a. $U = x^2y^3$

$$MU_x = U_x = \frac{\partial U}{\partial x} = 2xy^3$$

$$MU_y = U_y = \frac{\partial U}{\partial y} = 3x^2y^2$$

b. Jika $x = 14$ dan $y = 13$,

$MU_x = 2\ (14)(13)^3 = 61.516$

$MU_y = 3\ (14)^2(13)^2 = 99.372$

c. $\frac{MU_x}{P_x} = \frac{61.516}{25} = 2.460{,}64$

$$\frac{MU_y}{P_y} = \frac{99.372}{50} = 1.987{,}44$$

$$\frac{MU_x}{P_x} \neq \frac{MU_y}{P_y}$$

Berarti kombinasi 14 unit X dan 13 unit Y tidak memberikan kepuasan optimum, tidak terjadi keseimbangan konsumsi.

9.4 Produk Marjinal Parsial dan Keseimbangan Produksi

A. Produk Marjinal Parsial

Untuk memproduksi sesuatu barang pada dasarnya diperlukan beberapa macam faktor produksi seperti tanah, modal, tenaga kerja, bahan

baku, mesin-mesin dan sebagainya. Jika jumlah keluaran yang dihasilkan dilambangkan dengan P dan masukan yang digunakan dilambangkan dengan x_i. $(i = 1,2, \dots, n)$, maka fungsi produksinya dapat dituliskan dengan notasi $P = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$.

Selanjutnya jika untuk memproduksi suatu barang dianggap hanya dua macam masukan variabel (katakanlah K dan L), maka fungsi produksinya secara pasti dapat dinyatakan dengan :

$$\boxed{P = f(k, l)}$$

Derivatif pertama dari P merupakan produk marjinal parsialnya.

$\frac{\partial P}{\partial k}$ adalah produk marjinal berkenaan dengan barang K.

$\frac{\partial P}{\partial l}$ adalah produk marjinal berkenaan dengan barang L.

Untuk $P =$ konstanta tertentu, fungsi produksi $P = f(k, l)$ merupakan suatu persamaan isoquant, yaitu kurva yang menunjukkan berbagai kombinasi penggunaan masukan K dan L, yang menghasilkan keluaran dalam jumlah yang sama.

B. Keseimbangan Produksi

Keseimbangan produksi maksudnya ialah suatu keadaan atau tingkat penggunaan kombinasi faktor-faktor produksi secara optimum, yaitu suatu tingkat pencapaian produksi dengan kombinasi biaya terendah (*least cost combination*). Secara geometri, keseimbangan produksi terjadi pada persinggungan *isocost* dengan *isoquant*. *Isocost* adalah kurva yang mencerminkan kemampuan produsen membeli berbagai macam masukan berkenaan dengan harga masing-masing masukan dan jumlah dana yang dimilikinya. Jika jumlah dana yang dianggarkan untuk membeli masukan K

dan masukan L, adalah sebesar M, serta harga masukan K dan masukan L, masing-masing P_k dan P_l, persamaan isocostnya dapat dituliskan dengan notasi $M = k.P_k + l.P_l$.

Tingkat kombinasi penggunaan masukan yang optimum atau "*least cost combination*" dapat dicari dengan metode Lagrange. Dalam hal ini fungsi produksi $P = f(k, l)$ dimaksimumkan terhadap fungsi isocost :

$$M = k.P_k + l.P_l.$$

Fungsi tujuan yang hendak dioptimumkan : $P = f(k, l)$

Fungsi kendala yang dihadapi : $M = k.P_k + l.P_l$

$$k.P_k + l.P_l - M = 0$$

Fungsi baru lagrange : $F(k, l) = f(k, l) + \lambda(k.P_k + l.P_l - M)$

Agar F (k,l) maksimum:

$F_k(k, l) = 0 \rightarrow f_k(k, l) + \lambda P_k = 0$ ……. (1)

$F_l(k, l) = 0 \rightarrow f_l(k, l) + \lambda P_l = 0$ ……..……. (2)

Selanjutnya perhatikan:

Produksi Total : $P = f(k, l)$

(i) Produksi marjinal masukan K: $MP_K = f_k(k, l) = \frac{\partial P}{\partial k}$

(ii) Produksi marjinal masukan L: $MP_L = f_l(k, l) = \frac{\partial P}{\partial l}$

Menurut (1) : $f_k(k, l) + \lambda P_k = 0 \quad \rightarrow f_k(k, l) = -\lambda P_k, \quad -\lambda = \frac{f_k(k,l)}{P_k}$

Menurut (2) : $f_l(k, l) + \lambda P_l = 0 \quad \rightarrow f_l(k, l) = -\lambda P_l, \quad -\lambda = \frac{f_l(k,l)}{P_l}$

Dari (1) dan (2), syarat keseimbangan produksi dapat juga dirumuskan:

$$\frac{f_k(k,l)}{P_k} = \frac{f_l(k,l)}{P_l}$$

$$\frac{MP_K}{P_k} = \frac{MP_L}{P_l}$$

Jadi, bahwa produksi optimum dengan kombinasi biaya terendah akan tercapai apabila hasilbagi produk marjinal masing-masing masukan terhadap harganya bernilai sama.

Contoh :

1. Fungsi produksi suatu barang dinyatakan dengan $P = 6k^{2/3}l^{1/3}$. Bentuklah fungsi produk marjinal untuk masing-masing faktor produksi. Berapa produk marjinal tersebut jika digunakan 8 unit K dan 27 unit L ?

   Jawab :

   $P = 6k^{2/3}l^{1/3}$

   $MP_K = f_k(k,l) = \frac{\partial P}{\partial k} = 4k^{-1/3}l^{1/3} = \frac{4l^{1/3}}{k^{1/3}}$

   Jika $k = 8$ dan $l = 27$,

   $$MP_K = \frac{4(27)^{1/3}}{8^{1/3}} = \frac{4\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{4(3)}{2} = 6$$

   $$MP_L = \frac{2(8)^{2/3}}{27^{2/3}} = \frac{2\sqrt[2]{8^2}}{\sqrt[3]{27^2}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{729}} = \frac{2(4)}{9} = \frac{8}{9}$$

2. Kepuasan seorang konsumen dari mengkonsumsi barang X dan Y dicerminkan oleh fungsi utilitas $U = x^2y^3$. Jumlah pendapatan konsumen 1000 rupiah, harga X dan harga Y per unit masing-masing 25 rupiah dan 50 rupiah. Kombinasi konsumsi yang memberikan

kepuasan optimum adalah 16 unit X dan 12 unit Y, dengan nilai kepuasan $U = 442.368$. Buktikan bahwa untuk mencari tingkat produksi optimum berlaku ketentuan $\frac{MP_K}{P_k} = \frac{MP_L}{P_l}$

Jawab :

$P = 12kl - MP_K = \frac{\partial P}{\partial k} = 12\ l$ dan $MP_L = \frac{\partial P}{\partial l} = 12\ k$

Untuk $P_k = 4$, $P_l = 3$, $k = 12$ dan $l = 16$;

$$\frac{MP_K}{P_k} = \frac{MP_L}{P_l} \rightarrow \frac{12l}{4} = \frac{12k}{3} \rightarrow \frac{12(16)}{4} = \frac{12(12)}{3} \text{ terbukti.}$$

9.5 Latihan Soal

1. Seorang produsen mencadangkan 96 rupiah untuk membeli masukan K dan masukan L. Harga per unit masukan K adalah 4 rupiah dan masukan L adalah 3 rupiah. Fungsi produksinya $P = 12kl$. Berapa unit masing-masing masukan seharusnya ia gunakan agar produksinya optimum, dan berapa unit keluaran yang dihasilkannya dari kombinasi tersebut ?

   Jawab :

   Fungsi tujuan yang hendak dioptimumkan : $P = f(k, l) = 12kl$

   Fungsi kendala yang dihadapi : $M = k.P_k + l.P_l$

   $96 = 4k + 3l,$

   $96 - 4k - 3l = 0$

   Fungsi baru lagrange :

   $F(k, l) = f(k, l) + \lambda(k.P_k + l.P_l - M)$

   $F(k, l) = 12kl + \lambda(96 - 4k - 3l)$

   $F(k, l) = 12kl + 96\ \lambda - 4\lambda k - 3\lambda l$

Agar F (k,l) maksimum, $F_k = 0$ dan $F_l = 0$

$$F_k(k,l) = f_k(k,l) + \lambda P_k = 0$$

$$F_k(k,l) = 12\,l - 4\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 3l$$

$$F_l(k,l) = f_l(k,l) + \lambda P_l = 0$$

$$F_l(k,l) = 12\,k - 3\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 4k$$

$$3l = 4k$$

$$96 = 4k + 3l$$

$$96 = 4k + 4k - 96 + 8k \rightarrow k = 12$$

$$l = \frac{4}{3}\,(12) = 16$$

$$P = 12kl = 12(12)(16) = 2.304$$

Jadi agar produksinya optimum seharusnya digunakan kombinasi 12 unit K dan 16 unit L, dengan hasil produksi 2.304 unit.

DAFTAR PUSTAKA

Dumairy. 2012. *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi*. Edisi Kedua. Yogyakarta: BPFE – Yogyakarta (12 November 2018 ; 16.10)

Pattiwael Judith Felicia. 2002. *Matematika Ekonomi.* Salemba Empat. (12 November 2018 ; 19.20)

Sunyoto Danang. 2011. *Matematika Ekonomi dan Bisnis.* CAPS. (15 November 2018 ; 17.35)

Kalangi Josep Bintang. Tahun. *Matematika Ekonomi dan Bisnis*. Salemba Empat. (17 November 2018 ; 20.15)

Dumatubun Pius Izak. 1999. *Matematika Aplikasi Bisnis dan Ekonomi*. ANDI Yogyakarta (18 November 2018 ; 10.15)

http://ordeku.blogspot.com/2015/11/aplikasi-fungsi-kuadrat-dalam-ekonomi.html (18 November 2018 ; 12.10)

http://lucyagustina94.blogspot.com/2013/05/aplikasi-fungsi-kuadrat_26.html (18 November 2018 ; 12.45)

http://www.akuntansilengkap.com/ekonomi/pengertian-contoh-soal-dan-jawaban-fungsi-permintaan-dan-penawaran/ (19 November 2018 ; 16.35)

http://clickyhun.blogspot.com/2014/07/pengaruh-subsidi-terhadap-keseimbangan_22.html (19 November 2018 ; 18.30)

http://belbellayy.blogspot.com/2013/12/fungsi-biaya-fungsi-penerimaan-fungsi.html (19 November 2018 ; 21.25)