UNIVERSITAS PERSADA INDONESIA Y.A.I
FAKULTAS EKONOMI DAN BISNIS
Kampus A: Jl. Diponegoro No.74 Jakarta Pusat 10340, Indonesia
Telepon : (021) 3904858, 31936540 Fax: (021) 3140604

Jakarta, 15 September 2020

Nomor : 860 /D/FEB UPI Y.A.I/IX /2020
Lampiran : -
Perihal : Pembuatan Diktat Bahan Ajar

Kapada Yth,

Bida Sari, SP, M.Si

Dosen Tetap Fakultas Ekonomi dan Bisnis UPI Y.A.I

Di

Tempat

Berdasarkan hasil evaluasi dari Program Studi Manajemen S-1 FEB UPI Y.A.I terhadap kebutuhan diktat yang akan diberikan kepada mahasiswa FEB UPI Y.A.I, maka kami menugaskan Ibu untuk mempersiapkan diktat bahan ajar Matematika Ekonomi agar dapat segera digunakan oleh mahasiswa FEB UPI Y.A.I.

Diktat Bahan Ajar tersebut agar dapat diselesaikan paling lambat 1 semester terhitung sejak surat tugas ini ditanda tangani.

Demikian surat tugas ini dibuat untuk dapat dilaksanakan sebagaimana mestinya.

Hormat Kami,
Fakultas Ekonomi dan Bisnis UPI Y.A.I

Dr. Marhalinda, SE, MM
Dekan

Tembusan :
Yth. Rektor Universitas persada Indonesia Y.A.I

UNIVERSITAS PERSADA INDONESIA Y.A.I
FAKULTAS EKONOMI DAN BISNIS
Kampus A: Jl. Diponegoro No.74 Jakarta Pusat 10340, Indonesia
Telepon : (021) 3904858, 31936540 Fax: (021) 3140604

Jakarta, 25 September 2020

No. : 039d /Perpus FEB UPI YAI/IX/2020
Lampiran : -
Perihal : Surat Keterangan Penerimaan Diktat Bahan Ajar
Di Perpustakaan FEB UPI Y.A.I.

Kepada Yth.
Bida Sari, SP., M.Si
Dosen Fakultas Ekonomi dan Bisnis UPI Y.A.I.
Di Tempat

Dengan hormat,

Dengan ini Perpustakaan Fakultas Ekonomi dan Bisnis UPI Y.A.I telah menerima satu diktat bahan ajar Matematika Ekonomis atas nama :

Penulis	:	Bida Sari, SP., M.Si
N I D N	:	0317047302
Program Studi	:	Akuntansi
Fakultas	:	Fakultas Ekonomi dan Bisnis
Pusat Penelitian	:	Universitas Persada Indonesia Y.A.I.

Diktat bahan ajar ini dijadikan bahan referensi di lingkungan Fakultas Ekonomi dan Bisnis UPI YAI

Demikian surat keterangan ini dibuat untuk dapat digunakan sebagaimana mestinya atas kerjasamanya kami ucapkan terima kasih.

Mengetahui
Dekan FEB UPI YAI

Dr. Marhalinda, S.E.,M.M

Perpustakaan FEB UPI YAI
Kepala Perpustakaan

Erlina Mulat Susanti, A.Md

DIKTAT BAHAN AJAR

MATEMATIKA EKONOMI

Penulis :

BIDA SARI, SP, M.Si.

(NIDN : 0317047302)

FAKULTAS EKONOMI DAN BISNIS

UNIVERSITAS PERSADA INDONESIA Y.A.I.

J A K A R T A

2020

HALAMAN PENGESAHAN

DIKTAT BAHAN AJAR

1.	J u d u l	:	**MATEMATIKA EKONOMI**
2.	Penulis Modul	:	Bida Sari, SP, MSi.
3.	Tempat Penerapan	:	Fakultas Ekonomi dan Bisnis UPI Y.A.I
4.	Jangka Waktu Kegiatan	:	1 (satu) Semester
5.	Sifat Kegiatan	:	Pembuatan / Penyusunan Diktat Bahan Ajar
6.	Sumber Dana	:	Pribadi

Jakarta, 21 September 2020

Penulis,

Bida Sari, S.P, M.Si.
NIDN : 0317047302)

Mengetahui,
Fakultas Ekonomi dan Bisnis
Universitas Persada Indonesia Y.A.I.

Dekan

Dr. Marhalinda, S.E, M.M.
(NIDN : 0325036102)

Kepala Program Studi Akuntansi

Dr. Lely Indriaty, S.E., M.M.
(NIDN : 0005086201)

KATA PENGANTAR

Konsep-konsep matematika menjadi alat analisis yang penting dalam ilmu ekonomi. Matematika dapat menyederhanakan penyajian dan pemahaman masalah-masalah ekonomi. Matematika Ekonomi dan Bisnis bertujuan memberikan pengertian yang lebih mendalam tentang konsep-konsep dasar ilmu ekonomi dengan menerapkan matematika dalam bahasan-bahasannya.

Diktat bahan ajar ini berisi uaraian materi, contoh-contoh soal dan latihan mengenai penerapan konsep-konsep matematika dalam bidang ekonomi dan bisnis. Materi disusun berdasarkan Satuan Acara Perkulihaan (SAP) Mata Kuliah Matematika Ekonomi dan Bisnis selama satu semester pada Fakultas Ekonomi dan Bisnis. Penyajian setiap bab diawali dengan model-model matematika murni, disusun dengan penjelasan ringkas tentang logika dari konsep-konsep ekonomi yang menerapakan model tersebut, kemudian penerapan model matematika itu sendiri dalam konsep ekonomi yang bersangkutan beserta contoh-contoh praktisnya.

Buku ini disusun sedemikian rupa agar dapat dipahami dengan mudah oleh pembaca dan dapat bermanfaat sebagai pelengkap buku acuan terutama bagi mahasiswa yang mengambil mata kuliah matematika ekonomi dan bisnis.

Akhirnya, penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu secara langsung maupun tidak langsung hingga tersusunnya diktat bahan ajar ini. Semoga buku ini dapat bermanfaat dan kritik serta saran-saran bagi perbaikan kedepannya sangat diharapkan.

Jakarta, 21 September 2020

P e n u l i s ,

Bida Sari, S.P, M.Si.
(NIDN : 0317047302)

DAFTAR ISI

Halaman Sampul i
Halaman Pengesahan ii
Kata Pengantar iii
Daftar Isi iv
BAB I. DASAR-DASAR ALJABAR, BILANGAN PANGKAT DAN AKAR 1
I. Dasar-Dasar Aljabar 1
A. Sifat Komutatif (Pertukaran) 1
B. Sifat Asosiatif (Pengelompokan) 2
C. Sifat Distributif (Penyebaran) 3
II. Bilangan Berpangkat 3
A. Kaidah Pemangkatan Bilangan 4
B. Kaidah Perkalian Bilangan Berpangkat 5
C. Kaidah Pembagian Bilangan Berpangkat 5
III. Bilangan Akar 5
A. Kaidah Pengakaran Bilangan 6
B. Kaidah Penjumlahan (Pengurangan) Bilangan Terakar 7
C. Kaidah Perkalian Bilangan Terakar 7
D. Kaidah Pembagian Bilangan Terakar 8
Latihan Soal 8
BAB II. FUNGSI LINEAR 9
I. Fungsi 9
II. Jenis – Jenis Fungsi 9
III. Fungsi Linear Dan Pembentukan Fungsi Linear 12
IV. Kemiringan Dan Titik Potong Sumbu 14
V. Hubungan Dua Garis Lurus Koordinat Titik Potong 2 Fungsi 15
VI. Koordinat Titik Potong 2 Fungsi 15
VII. Menggambar Grafik Fungsi Linear 16
Latihan Soal 17
BAB III. APLIKASI FUNGSI LINEAR DALAM EKONOMI 18
I. Fungsi Permintaan, Fungsi Penawaran, Dan Keseimbangan Pasar 18
A. Fungsi Permintaan 18

B. Fungsi Penawaran 18
C. Keseimbangan Pasar 19
D. Efek Pajak pada Keseimbangan Pasar 19
D. Efek Subsidi pada Keseimbangan Pasar 21
II. Fungsi Biaya, Fungsi Penerimaan, Dan Analisi Pulang Pokok (BEP) 23
A. Fungsi Biaya 23
B. Fungsi Penerimaan 24
C. Keuntungan 25
D. Analisis Pulang Pokok 25
Latihan Soal 26
III. Fungsi Konsumsi, Tabungan, Dan Model Penentuan Pendapatan Nasional 27
A. Fungsi Konsumsi 28
B. Fungsi Tabungan 28
C. Angka Pengganda Pendapatan (Multiplier) 29
D. Model Penentuan Pendapatan Nasional 29
Latihan Soal 32
BAB IV. FUNGSI KUADRAT (PARABOLA) 34
I. Jenis Fungsi Parabola 34
II. Nilai Ekstrim (Maksimum Dan Minimum) 38
III. Rumus Kuadrat 39
V. Titik Potong Dua Grafik (Kurva) 41
BAB V. APLIKASI FUNGSI KUADRAT DALAM EKONOMI 43
I. Fungsi Permintaan, Fungsi Penawaran, Dan Keseimbangan Pasar 43
A. Fungsi Permintaan (Demand) 43
B. Fungsi Penawaran (Supply) 43
C. Keseimbangan Pasar (Market Equilibrium) 44
II. Efek Pajak Terhadap Keseimbangan Pasar 47
III. Efek Subsidi Terhadap Keseimbangan Pasar 48
IV. Fungsi Biaya 52
V. Fungsi Penerimaan 54
VI. Analisis Laba/Rugi Dan BEP (Break Even Point) 56
Latihan Soal 58
VII. Fungsi Utilitas 58

VIII. Fungsi Produksi 55
BAB VI. DIFERENSIAL FUNGSI SEDERHANA 61
I. Hakikat derivatif Dan Diferensial 61
II. Kaidah – Kaidah Diferensial 62
III. Hubungan Fungsi Dan Derivatifnya 66
IV. Nilai Ekstrim Fungsi 69
BAB VII. APLIKASI DIFERENSIAL FUNGSI SEDERHANA DALAM EKONOMI 71
I. Elastisitas Permintaan, Penawaran Dan Produksi 71
II. Konsep nilai Marjinal, Nilai Ekstrim Pada Fungsi Biaya 72
III. Analisis Keuntungan Maksimum 78
IV. Penerimaan Pajak Maksimum 79
V. Efek Pemajakan Bagi Penunggal 81
Latihan Soal 83
BAB VIII. DIFERENSIAL FUNGSI MULTIVARIABEL 84
I. Diferensial Parsial 84
II. Derivatif Dari Derivatif Parsial 85
III. Optimasi Satu Variabel (Nilai Ekstrim Maksimum Atau Minimum) 86
IV. Optimasi Bersyarat (Metode Lagrange) 87
Latihan Soal 89
BAB IX. APLIKASI DIFERENSIAL MULTIVARIABEL DALAM EKONOMI 90
I. Permintaan Marjinal dan Elastisitas Permintaan Parsial 90
A. Permintaan Marginal (Marginal Demand) 90
B. Elastisitas Permintaan Parsial 90
II. Perusahaan Dengan 2 Macam Produk dan Biaya Produksi Gabungan 92
III. Utilitas Marginal Parsial Dan Keseimbangan Konsumsi 94
A. Utilitas Marginal 94
B. Keseimbangan Konsumsi 96
IV. Produk Marginal Parsial Dan Keseimbangan Produksi 99
A. Produk Marginal Parsial 99
B. Keseimbangan Produksi 99
Latihan Soal 101
Daftar Pustaka 103
Silabus Mata Kuliah Matematika Ekonomi 104

BAB I

DASAR-DASAR ALJABAR, BILANGAN PANGKAT DAN AKAR

I. DASAR-DASAR ALJABAR

Bentuk aljabar merupakan materi dasar yang harus dipahami terlebih dahulu sebelum masuk ke pembahasan mengenai fungsi dan persamaan dalam aljabar. Tiga sifat yang akan berlaku pada aljabar, yaitu sifat komutatif, sifat asosiatif, & sifat distributif.

A. Sifat Komutatif (Pertukaran)

Sifat komutatif adalah sifat operasi hitung terhadap 2 bilangan atau lebih yang menghasilkan **hasil yang sama**, walaupun letak bilangan yang dihitung saling ditukarkan. Sifat komutatif juga disebut dengan hukum komutatif.

Jika : **a** dan **b** adalah 2 bilangan yang dioperasikan dan **c** adalah hasil dari operasi hitung maka operasi hitung pada bilangan yang memenuhi sifat komutatif meliputi operasi penjumlahan dan perkalian sebagai berikut :

a) Sifat Komutatif pada Penjumlahan

Sifat komutatif pada operasi penjumlahan dapat dirumuskan sebagai berikut,

$$a + b = b + a = c$$

Contoh:

$2 + 3 = 3 + 2 = 5$, karena $2 + 3 = 5$ dan $3 + 2 = 5$

$3 + 7 + 6 = 6 + 7 + 3 = 16$, karena $3 + 7 + 6 = 16$ dan $6 + 7 + 3 = 16$

b) Sifat Komutatif pada Perkalian

Sifat komutatif pada operasi perkalian dapat dirumuskan sebagai berikut,

$$a \times b = b \times a = c$$

Contoh:

$3 \times 4 = 4 \times 3 = 12$, karena $3 \times 4 = 12$ dan $4 \times 3 = 12$

$3 \times 5 \times 2 = 2 \times 5 \times 3 = 30$, karena $3 \times 5 \times 2 = 30$ dan $2 \times 5 \times 3 = 30$

c) Komutatif tidak berlaku pada Pengurangan dan Pembagian

Sifat komutatif tidak berlaku pada operasi pengurangan dan pembagian bilangan bulat, karena hasil pertukaran bilangan terhadap operasi tersebut tidak menghasilkan nilai yang sama.

Contoh:

Pengurangan : $7 - 3 = 4$ **tidak sama dengan** $3 - 7 = (-4)$

Pembagian : $8 : 2 = 4$ **tidak sama dengan** $2 : 8 = 0{,}25$

B. Sifat Asosiatif (Pengelompokan)

Sifat asosiatif adalah sifat operasi hitung terhadap 3 bilangan menggunakan bantuan pengelompokan 2 bilangan dengan tanda kurung dan apabila pengelompokan ditukarkan hasil tetap sama. Atau, operasi hitung yang memenuhi sifat asosiatif menghasilkan nilai yang sama, walaupun tanda kurung (pengelompokan) ditukarkan. Sifat asosiatif juga disebut dengan hukum asosiatif.

Jika : **a**, **b**, dan **c** adalah bilangan yang dioperasikan dan **d** adalah hasil operasi bilangan maka operasi hitung pada bilangan yang memenuhi sifat asosiatif adalah **penjumlahan** dan **perkalian** sebagai berikut :

a) Sifat Asosiatif pada Penjumlahan

Sifat asosiatif pada operasi penjumlahan dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$\mathbf{(a + b) + c = a + (b + c) = d}$$

Contoh:

$(1+ 2) + 3 = 1 + (2 + 3) = 6$

karena $(1 + 2) + 3 = 3 + 3 = 6$

$1 + (2 + 3) = 1 + 5 = 6$

} sama hasilnya

b) Sifat Asosiatif pada Perkalian

Sifat asosiatif pada operasi perkalian dapat dirumuskan sebagai berikut,

$$\mathbf{(a \times b) \times c = a \times (b \times c) = d}$$

Contoh:

$(2 \times 3) \times 4 = 2 \times (3 \times 4) = 24$

Karena : $(2 \times 3) \times 4 = 6 \times 4 = 24$

$2 \times (3 \times 4) = 2 \times 12 = 24$

} sama hasilnya

c) Sifat Asosiatif tidak berlaku pada Pengurangan dan Pembagian

Sifat asosiatif tidak berlaku pada operasi perkalian dan pembagian karena pertukaran pengelompokan bilangan mengubah hasil akhir dari operasi 3 bilangan yang dihitung.

Contoh :

$(8– 4) – 2 = 4 – 2 = 2$ **tidak sama dengan** $8 – (4 – 2) = 8 – 2 = 6$

$(24 : 6) : 2 = 4 : 2 = 2$ **tidak sama dengan** $24 : (6 : 2) = 24 : 3 = 8$

C. **Sifat Distributif (Penyebaran)**

Sifat distributif adalah sifat operasi hitung dengan 2 operasi hitung yang berbeda, salah satu operasi hitung berfungsi sebagai operasi penyebaran dan operasi lainnya digunakan untuk menyebarkan bilangan yang dikelompokan dalam tanda kurung. Sifat distributif juga disebut dengan hukum distributif.

a) Distributif Perkalian terhadap Penjumlahan

Sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan dirumuskan sebagai berikut:

$$\mathbf{a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c) = d}$$

a adalah bilangan yang didistribusikan:
b dan c adalah bilangan yang dikelompokan
d adalah hasil operasi hitung

Contoh:

$2 \times (3 + 4) = (2 \times 3) + (2 \times 4)$
$2 \times 7 = 6 + 8$
$14 = 14 \quad \rightarrow$ sama hasilnya

b) Distributif perkalian terhadap pengurangan

Sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan dirumuskan sebagai berikut:

$$\mathbf{a \times (b - c) = (a \times b) - (a \times c) = d}$$

Contoh:

$3 \times (4 - 2) = (3 \times 4) - (3 \times 2)$
$3 \times 2 = 12 - 6$
$6 = 6 \quad \rightarrow$ sama hasilnya

II. BILANGAN BERPANGKAT

Pangkat dari sebuah bilangan ialah suatu indeks yang menunjukkan banyaknya perkalian bilangan yang sama secara beruntun. Notasi x^a berarti bahwa x harus dikalikan dengan x itu sendiri secara berturut-turut sebanyak a kali. Notasi pemangkatan sangat berfaedah untuk merumuskan penulisan bentuk perkalian secara ringkas.

Sebagai contoh: perkalian bilangan 7 sebanyak 5 kali tak perlu ditulisakn dengan lengkap 7 x 7 x 7 x 7 x 7, melainkan cukup diringkas menjadi 7^5.

Jadi, $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^5$

Contoh lain : $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^7$
$0{,}3 \times 0{,}3 \times 0{,}3 \times 0{,}3 \times 0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}3^6$

Notasi pemangkatan berfaedah pula untuk meringkas bilangan-bilangan kelipatan perkalian-sepuluh yang nilainya sangat besar atau sangat kecil.
Contoh: bilangan 100.000 dapat diringkas menjadi 10^5; bilangan 1/100.000 atau 0,00001 dapat diringkas menjadi 10^{-5}.

Begitu pula, $1.000.000.000 = 10^9$
$5.000.000.000 = 5 \cdot 10^9$
$7.500.000.000 = 7{,}5 \cdot 10^9$ atau $75 \cdot 10^8$
$0{,}000.000.001 = 10^{-9}$
$0{,}000.000.034 = 34 \cdot 10^{-9}$ atau $3{,}4 \cdot 10^{-8}$

Pemangkatan sebuah bilangan dan pengoperasian bilangan-bilangan berpangkat mematuhi kaidah-kaidah tertentu.

A. Kaidah Pemangkatan Bilangan

1. Bilangan bukan-nol berpangkat nol adalah satu.
   $x^0 = 1 \ (x \neq 0)$ Contoh: $3^0 = 1$

2. Bilangan berpangkat satu adalah bilangan itu sendiri.
   $x^1 = x$ Contoh: $3^1 = 3$

3. Nol berpangkat sebuah bilangan adalah tetap nol.
   $0^x = x$ Contoh: $0^3 = 0$

4. Bilangan berpangkat negatif adalah alikan pengali (*multiplicative inverse)* dari bilangan itu sendiri.
   $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ atau $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$ Contoh : $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ ($\frac{1}{9} \equiv 9^{-1}$)

5. Bilangan berpangkat pecahan adalah akar dari bilangan itu sendiri, dengan suku pembagi dalam pecahan menjadi pangkat dari akarnya sedangkan suku terbagi menjadi pangkat dari bilangan yang bersangkutan.
   $x^{\frac{a}{b}} = \sqrt[b]{x^a}$ Contoh : $x^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2} = \sqrt[5]{9} = 1{,}55$

6. Bilangan pecahan berpangkat adalah hasil bagi suku-suku berpangkat.
   $\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$ Contoh : $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$

7. Bilangan berpangkat dipangkatkan lagi adalah bilangan berpangkat hasil kali pangkat-pangkatnya.
   $(x^a)^b = x^{ab}$ Contoh : $(3^2)^4 = 3^{2.4} = 3^8 = 6.561$

8. Bilangan dipangkatkan pangkat-berpangkat adalah bilangan berpangkat hasil pemangkatan pangkatnya.

   $\boldsymbol{x^{a^b} = x^c}$, di mana $c = a^b$ Contoh: $3^{2^4} = 3^{16} = 43.046.72$

Kaidah ke-7 dan ke-8 di atas perlu mendapatkan perhatian khusus, sebab acapkali diselesaikan secara tak benar. Jika kita kurang teliti, contoh-contoh dalam kaidah ke-7 dan ke-8 tersebut bisa diselesaikan menjadi 9^4 (=1.296), padahal seharusnya masing-masing adalah 3^8 dan 3^{16}. Prinsip penyelesaian bilangan yang pangkatnya beranting ialah menyelesaikan pangkat-pangkatnya terlebih dahulu.

B. Kaidah Perkalian Bilangan Berpangkat

9. Hasilkali bilangan-bilangan berpangkat yang basisnya sama adalah bilangan basis berpangkat jumlah pangkat-pangkatnya.

   $\mathbf{x^a \cdot x^b = x^{a+b}}$ Contoh: $3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 3^6 = 729$

10. Hasilkali bilangan-bilangan berpangkat yang pangkatnya sama, tetapi basisnya berbeda, adalah perkalian basis-basisnya dalam pangkat yang bersangkutan.

    $x^a \cdot y^a = (xy)^a$ Contoh: $3^2 \cdot 5^2 = (3.5)^2 = 15^2 = 225$

C. Kaidah Pembagian Bilangan Berpangkat

11. Hasilbagi bilangan-bilangan berpangkat yang basisnya sama adalah bilangan basis berpangkat selisih pangkat-pangkatnya.

    $\mathbf{x^a : x^b = x^{a-b}}$ Contoh: $3^2 : 3^4 = 3^{2-4} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$

12. Hasilbagi bilangan-bilangan berpangkat yang pangkatnya sama, tetapi basisnya berbeda, adalah pembagian basis-basisnya dalam pangkat yang bersangkutan.

    $\mathbf{x^a : y^a = \left(\frac{x}{y}\right)^a}$ Contoh: $3^2 : 5^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$

Bandingkan **kaidah ke-12** ini dengan **kaidah ke-6** di muka.

III. BILANGAN AKAR

Akar merupakan bentuk lain untuk menyatakan bilangan berpangkat. Akar dari sebuah bilangan ialah basis yang memenuhi bilangan tersebut berkenaan dengan pangkat akarnya. Berdasarkan konsep pemangkatan kita mengetahui, bahwa jika bilangan-bilangan yang sama (misalnya x) dikalikan sejumlah tertentu sebanyak (katakanlah) *a* kali, maka kita dapat menuliskan menjadi $\mathbf{x^a}$; *x* disebut *basis* dan *a* disebut *pangkat.*
Andaikata $\mathbf{x^c = m}$, maka x dapat juga disebut sebagai akar pangkat a dari m, yang jika dituliskan dalam bentuk akar menjadi $\mathbf{x = \sqrt[a]{m}}$.

Secara umum : $\sqrt[a]{m} = x \; jika \; x^a = m$

Jadi, $\sqrt[a]{m} = x$ sebab $x^a = m$; atau dengan perkataan lain $\sqrt[a]{m} = x$ jika $x^a = m$.

Contoh : $\sqrt[3]{9} = 3$ sebab $3^2 = 9$

$\sqrt[3]{64} = 4$ sebab $4^3 = 64$

Dalam notasi $\sqrt[a]{m}$, *a* disebut pangkat dari akar sedangkan *m* disebut *radikan*.

Pangkat 2 dari akar biasanya tidak di cantumkan dalam penulisan, sehingga tanda akarnya yang tidak mencantumkan pangkat dengan sendirinya harus dibaca dan ditafsirkan sebagai akar berpangkat 2. Contoh : $\sqrt[2]{9} = \sqrt{9}$, $\sqrt[2]{25} = \sqrt{25}$.

Apabila pangkat akarnya berupa bilangan genap, maka radikan positif akan menghasilkan dua macam akar ; yang satu positif dan satunya lagi negatif. Hal ini selaras dengan kaidah perkalian dalam operasi tanda, bahwa baik bilangan positif maupun bilangan negatif jika berpangkat genap akan menghasilkan bilangan positif.

Jadi, sesumgguhnya $\sqrt{9} = \pm 3$ (baca: +3 dan -3), bukan hanya +3 ; sebab $(-3)^2 = 9$ juga. Sama halnya, $\sqrt{25} = \pm 5$ dan bukan hanya +5, $\sqrt[4]{16} = \pm 2$ dan bukan hanya +2.

Apabila pangkat akarnya genap dan radikannya negatif, hasilnya adalah berupa bilangan khayal. Sebagai contoh $\sqrt{-9}$ adalah bilangan khayal , sebab baik +3 maupun -3 jika dipangkatkan 2 tidak ada yang menghasilkan -9.

Apabila pangkat akarnya berupa bilangan ganjil, baik radikan positif maupun radikan negatif hanya akan menghasilkan akar positif.

Contoh : $\sqrt[3]{64}$ = +4 sebab hanya (+4) (+4) (+4) = 64

Contoh radikan menghasilkan akar negatif : $\sqrt[3]{-64}$ = -4 sebab hanya (-4) (-4) (-4) = -64

Seperti halnya dalam pemangkatan, pengakaran bilangan pun mematuhi sejumlah kaidah.

A. Kaidah-Kaidah Pengakaran Bilangan

1. Akar dari sebuah bilangan adalah basis yang memenuhi bilangan tersebut berkenaan dengan pangkat akarnya.

   Berdasarkan $\sqrt[a]{m}$ = x jika $x^a = m$ (x adalah basis),

   Maka: $\sqrt[b]{x} = x^{\frac{1}{b}}$

   Sebab $(x^{\frac{1}{b}})^b = x^{\frac{b}{b}} = x^1 = x$

   Dalam hal ini $x^{\frac{1}{b}}$ adalah basis.

   Contoh : $\sqrt[3]{64} = 64^{\frac{1}{3}} = 4$

2. Akar dari sebuah bilangan berpangkat adalah bilangan itu sendiri berpangkat pecahan, dengan pangkat dari bilangan bersangkutan menjadi suku terbagi sedangkan pangkat dari akar menjadi suku pembagi.

   $\sqrt[b]{x^c} = x^{\frac{a}{b}}$ Contoh: $\sqrt[5]{3^2} = 3^{\frac{2}{5}} = 1{,}55$

   Kaidah ke-2 ini sesungguhnya merupakan pengembangan atau analogi dari kaidah ke-1 sebelumnya.

3. Akar dari suatu perkalian bilangan adalah perkalian dari akar-akarnya.

   $\sqrt[b]{XY} = \sqrt[b]{X} \,.\, \sqrt{y}$ $\sqrt[3]{8{,}64} = \sqrt[3]{8} \,.\, \sqrt[3]{64} = 2{,}4 = 8$
   (lihat juga kaidah ke-6 di bawah nanti)

4. Akar dari sebuah bilangan pecahan adalah pembagian dari akar suku-sukunya.

   $b\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[b]{x}}{\sqrt[b]{y}}$ Contoh: $3\sqrt{\frac{8}{64}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{2}{4} = 0{,}5$

   (bandingkan kaidah ini dengan kaidah ke-8 nanti).

B. Kaidah Penjumlahan (Pengurangan) Bilangan Terakar

Bilangan-bilangan terakar hanya dapat ditambahkan atau dikurangkan apabila akar-akarnya sejenis. Yang dimaksud dengan akar-akar yang sejenis ialah akar-akar yang pangkat dan radikannya sama.
Jumlah (selisih) bilangan-bilangan terakar adalah jumlah (selisih) koefisien-koefisiennya terakar.

$$m\sqrt[b]{x^a} \pm n\sqrt[b]{x^a} = (\,m \pm n\,)\sqrt[b]{x^a}$$

Contoh : $5\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 7\sqrt{3} = 7\,(1{,}73) = 12{,}11$

C. Kaidah Perkalian Bilangan Terakar

1. Hasilkali bilangan-bilangan terakar adalah akar yang dari hasilkali bilangannya. Perkalian hanya dapat dilakukan apabila akar-akarnya berpangkat sama.

   $$\sqrt[b]{x}.\sqrt[b]{y} = \sqrt[b]{xy}$$

   Contoh : $\sqrt[3]{8} \,.\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{8.64} = \sqrt[3]{512} = 8$

2. Akar ganda dari sebuah bilangan adalah akar pangkat baru dari bilangan bersangkutan; pangkat-baru akarnya ialah hasilkali pangkat dari akar-akar sebelumnya.

   $$\sqrt[b]{x^a}\,\sqrt[c]{x^a} = \sqrt[bc]{x^a}$$

   Contoh : $\sqrt[2]{15.625} \,.\sqrt[3]{15.625} = \sqrt[2.3]{15.625} = 5$

D. Kaidah Pembagian Bilangan Terakar

1. Hasil bagi bilangan-bilangan terakar adalah akar yang dari hasilbagi bilangannya. Pembagian hanya dapat dilakukan apabila akar-akarnya berpangkat sama.

$$\frac{\sqrt[b]{x}}{\sqrt[b]{y}} = \sqrt[b]{\frac{x}{y}}$$

Contoh: $\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{68}} = \sqrt[3]{\frac{8}{64}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = 0{,}5$

(Identik dengan kaidah ke-4 sebelumnya)

Latihan Soal :

1. Tentukan perkalian persamaan berikut :
   a. $(2x+1)^2 =$ b. $(3x+2)(3x+1) =$
2. Tentukan hasil bagi bilangan-bilangan berpangkat berikut ini :
   a. $3^2 \,.\, 3^4 =$ b. $3^2 .\, 5^2 =$ c. $3^2 : 5^2 =$
3. Tentukan hasil dari akar persamaan berikut :
   a. $\sqrt[3]{8.64}$ b. $5\sqrt{3} + 2\sqrt{3} =$ c. $\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{64}} =$
4. Tentukan nilai $\sqrt{\sqrt[3]{16}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \cdots$

BAB II

FUNGSI LINEAR

I. FUNGSI

- **Fungsi** adalah suatu bentuk hubungan matematis yang menyatakan hubungan ketergantungan (hubungan fungsional) antara suatu variabel dengan variabel lain. Sebuah fungsi dibentuk oleh beberapa unsur pembentuk fungsi, yaitu variable, koefisien dan konstanta.
- Notasi sebuah fungsi secara umum : $\mathbf{y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$
- **Variabel** ialah unsur pembentuk fungsi yang mencerminkan atau mewakili faktor tertentu, dilambangkan dengan huruf-huruf Latin.

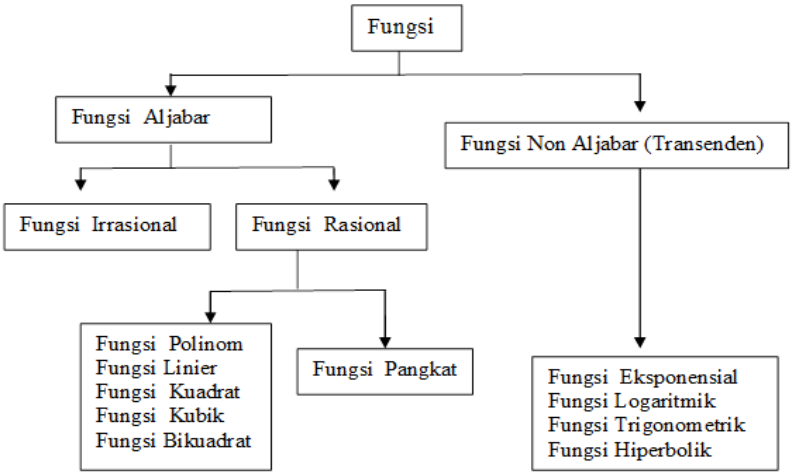
  Variabel yang terdapat dalam suatu fungsi dapat dibedakan atas **varibel bebas** (*independent variable*) dan **variabel tidak bebas**/ yang dipengaruhi (*dependent variable*).
- **Koefisien (b)** ialah bilangan atau angka yang terkait pada dan terletak di depan suatu variabel dalam suatu fungsi.
- **Konstanta (a)** ialah bilangan atau angka yang turut membentuk sebuah fungsi tetapi berdiri sendiri sebagai bilangan dan tidak terkait pada suatu variabel tertentu.

II. Jenis – Jenis Fungsi

Secara garis besar, fungsi terdiri dari fungsi aljabar dan fungsi transenden.

Fungsi aljabar adalah fungsi yang mengandung bentuk aljabar.
Contoh fungsi aljabar adalah fungsi konstan, fungsi identitas, fungsi linear, fungsi kuadrat, fungsi polinom, fungsi modulus, dan sebagainya.

Fungsi transenden adalah fungsi yang tidak mengandung fungsi aljabar.
Contoh fungsi transenden adalah fungsi eksponen, fungsi logaritma, fungsi trigonometri dan sebagainya.



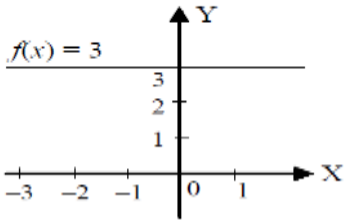
Bagan Pembeagian Fungsi (Dummairy, 2003)

a. Fungsi Konstan

Fungsi konstan adalah fungsi yang berbentuk $y = f(x) = k$ dengan k adalah sebuah konstanta atau skalar. Berapa pun nilai x disubstitusi, nilainya selalu sama atau konstan, yaitu k. Grafik fungsi ini berupa garis mendatar bsejajar sumbu x.

x	−3	−2	−1	0	1
$f(x)$	3	3	3	3	3

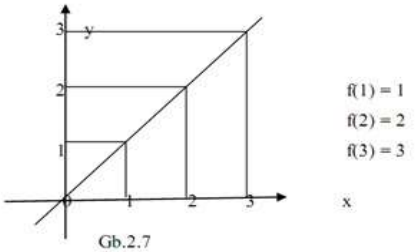
Grafik:



b. Fungsi Identitas

Fungsi identitas adalah fungsi memetakan setiap anggota ke diririnya sendiri. Secara umum, fungsi identitas ditulis sebagai $y = f(x) = x$. Grafik dari fungsi identitas adalah garis yang membentuk sudut 45^o terhadap sumbu x.

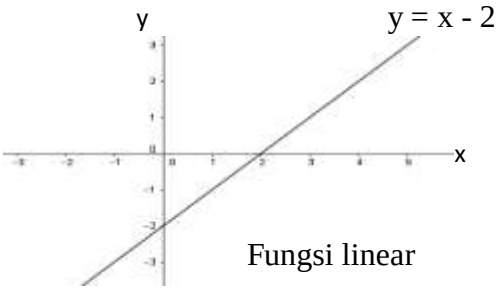
Fungsi R→R yang didefinisikan sebagai: f : x→ x disebut fungsi identitas.



Gb.2.7

c. Fungsi Linear

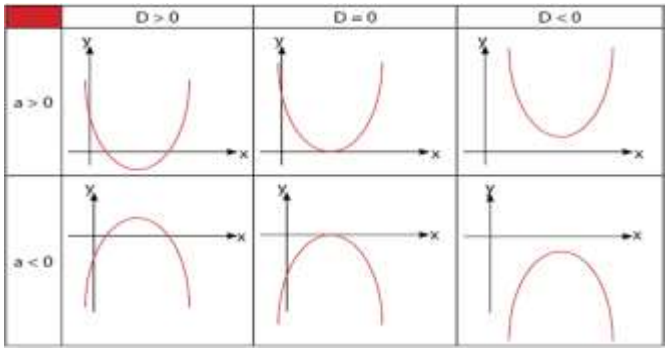
Fungsi linear adalah fungsi yang berbentuk $y = f(x) = ax + b$ dengan a tidak sama dengan nol. Grafik fungsi linear berupa garis.



Fungsi linear

d. Fungsi Kuadrat

Fungsi kuadrat adalah fungsi yang berbentuk $f(x) = ax^2 + bx + c$ dengan koefisien x^2, yaitu a tidak boleh sama dengan nol. Grafik fungsi kuadrat berbentuk kurva parabola.



e. Fungsi Polinom

Fungsi polinom adalah bentuk umum dari fungsi konstan, fungsi identitas, fungsi linear, dan fungsi kuadrat. Bentuk umumnya adalah sebagai berikut:

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.

Dengan $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$, adalah bilangan real, a_n tidak sama dengan nol, dan a_0 adalah konstanta.

f. Fungsi Modulus

Fungsi Modulus adalah fungsi yang memetakan setiap bilangan real pada domain fungsi ke unsur harga mutlaknya. $f : x \rightarrow |x|$ *atau* $f : x \rightarrow |ax + b|$, $f(x) = |x|$ artinya:

$$f(x) = \begin{cases} -x & jika\ x < 0 \\ x & jika\ x \geq 0 \end{cases}$$

Berdasarkan kedudukan variable di dalam fungsi, maka fungsi dibedakan menjadi 2 yaitu :

1. Fungsi Eksplisit : adalah suatu fungsi dimana antara variabel bebas dan tidak bebas dengan jelas dibedakan.
   Contoh : Y = f (X) $Y = 2X + 4$ → satu variabel bebas
   $Y = 2X_1 + 3X_2 + 3$ → dua variabel bebas

2. Fungsi Implisit : adalah fungsi dimana antara variabel bebas dan variabel tidak bebas tidak dapat dengan mudah/jelas dibedakan. Bentuk umum dari fungsi implisit ini dinyatakan dengan :
   f (X) = 0 → untuk satu variabel
   f (X,Y) = 0 → untuk dua variabel
   f (X, Y, Z) = 0 → untuk tiga variabel, dstnya
   Contoh : $6X + 4Y - 7 = 0$
   $X^2 - 2XY + Y^3 = 0$

III. Fungsi Linear Dan Pembentukan Fungsi Linear

Fungsi linier adalah fungsi polinom yang variable bebasnya memiliki pangkat paling tinggi adalah satu.
Contoh persamaan fungsi linear : $\mathbf{y = a_0 + a_1 x_1}$ atau
$\mathbf{y = a + bx}$ (lebih sering digunakan)

Dimana : a = konstanta
b = koefisien variable bebas
x = variabel bebas (exogenous)
y = variabel yang dipengaruhi (endogenous variable)
Contoh fungsi linear : $y = f(x) = 5 + 0{,}8\ x$

y merupakan dependen variable, 5 adalah konstanta, 0,8 koefisien variasi x dan x adalah independen variable

Pembentukan Persamaan Fungsi Linear

Persaman linear dapat dibentuk melalui beberapa cara, tergantung pada data yang tersedia. Berikut ini dicontohkan 5 cara pembentukan persamaan fungsi linear :

a) Cara Dwi Koordinat (Dua Titik)
   Cara ini menggunakan dua titik koordinat yang sudah diketahui sebelumnya untuk digambarkan, di mana kedua titik ini nantinya akan dilalui oleh sebuah garis yang terbentuk dari sebuah persamaan fungsi linear.
   Misalkan ada dua titik yaitu A (x_1, y_1) dan titik B (x_2, y_2), maka persamaan fungsinya didapatkan melalui rumus :

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Contoh : Carilah persamaan fungsi linear yang dilalui titik A(2,1) dan B (4,5) !

$$\frac{y-1}{5-1} = \frac{x-2}{4-5} \rightarrow \quad y = 2x - 3 \text{ , atau } y = -3 + 2x$$

b) Cara Slope-Koordinat (Koefisien Garis-Titik)

Pada metode ini menggunakan satu titik dan koefisien garis yang diberi simbol ***m*** atau tingkat kemiringan garis.

$$\mathbf{Y - Y_1 = m\,(X - X_1)}$$

Contoh : Carilah persamaan fungsi linear yang dilalui titik A(4,5) dan gradien m = 4 ?

Y – 5 = 4 (X – 4) → y = 4x - 11 atau y = -11 + 4x

c) Cara Penggal Lereng

Cara ini menggunakan salah satu titik konstanta yang perpotongan garis pada sumbu Y di titik (0,y) atau pada sumbu X di titik (x,0) dan slope (b) dari garis fungsi linear.

Jika koordinat penggal (0, y) maka rumus persamaannya : **y = a + bx**

Jika koordinat penggal (x, 0) maka rumus persamaannya : **x = a + by**

Contoh :

1) Persamaan fungsi linear yang dilalui titik A(0,2) dan b = 0,5 → y = 2 + 0,5x
2) Persamaan fungsi linear yang dilalui titik A(-4,0) dan b = 2 → x = -4 + 2y

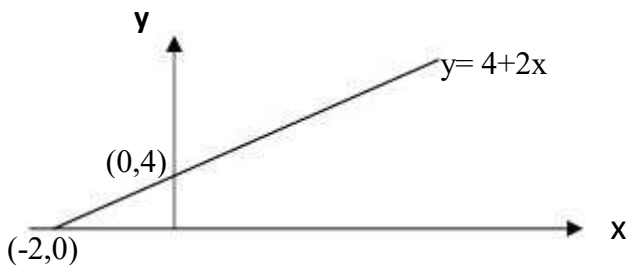
d) Cara Dwi-Penggal (Dua Konstanta)

Cara ini menggunakan dua titik konstanta melalui garis – garis lurus yang telah digambarkan ke dalam grafik tertentu. Sehingga dengan melihat titik – titik atau perpotongan garis pada sumbu Y di titik (0,y) dan sumbu di titik X, akan dapat diketahui persamaan fungsi linear dari garis tersebut.

$$\mathbf{y = \left(1 - \frac{X}{Xo}\right) yo}$$

Contoh : Carilah persamaan fungsi linear yang melalui titik penggal (0,4) dan (-2,0) !

Persamaan fungsi linear : $\mathbf{y = \left(1 - \frac{X}{-2}\right) 4 = 4 + 2x}$



e) Cara General Linear Equation

Syarat pembentukan persamaan fungsi linear adalah diketahui dua titik koordinat yaitu A (x_1 , y_1) dan titik B (x_2, y_2) yang dilalui garis fungsi tersebut.

Titik A (x_1 , y_1) : $y_1 = a + b\, x_1$

Titik B (x_2 , y_2) : $y_2 = a + b\, x_2$ -

$$y_1 - y_2 = b\,(x_1 - x_2)$$

$$b = \frac{y_1 - y_2}{(x_1 - x_2)} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\ \alpha$$

Contoh : Carilah persamaan fungsi linear yang melalui titik titik A(2,1) dan B (4,5) !

Titik A (2,1) : $1 = a + b.2$ → $1 = a + b.2$

Titik B (4,5) : $5 = a + b.4$ – $= a + (2).2$

$1 - 5 = b\,(2 - 4)$ $a = 1 - 4 = -3$

$$b = \frac{(1 - 5)}{2 - 4} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Persamaan fungsi linear : $y = -3 + 2x$

IV. Kemiringan dan Titik Potong Sumbu

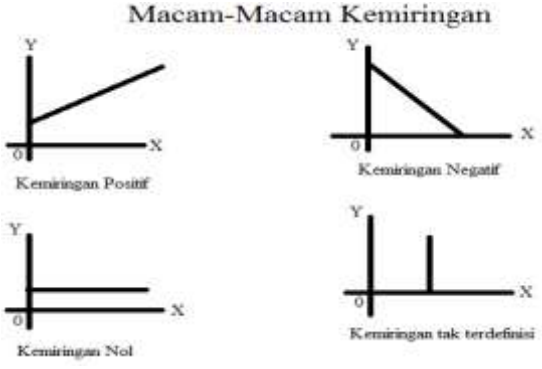
Suatu fungsi linear bila digambarkan pada bidang kartesius, maka grafiknya merupakan suatu garis lurus. Kemiringan pada setiap titik yang terletak pada garis lurus tersebut adalah sama. Hal ini ditunjukkan oleh koefisien **b** pada persamaan ***Y = a* + b*x*.** Koefisien **b** untuk mengukur perubahan nilai variabel terikat sebagai akibat dari perubahan variabel bebas sebesar satu unit.

Kemiringan (slope) dari fungsi linear dengan satu variabel bebas adalah sama dengan perubahan dalam variabel terikat dibagi dengan perubahan dalam variabel bebas. Dan biasanya dilambangkan dalam huruf ***m***. Jadi, ***b = m***

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

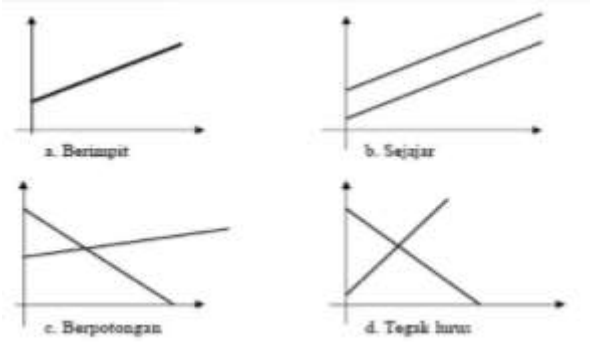
Sebagai contoh, y = 15 – 2x, kemiringannya adalah -2. Ini berarti bahwa untuk setiap kenaikan satu unit variabel ***x*** akan menurunkan 2 unit variabel ***y***. Sebaliknya, penurunan satu unit dalam variabel ***x*** akan meningkatkan 2 unit variabel ***y***.

Secara geometri, kemiringan suatu garis lurus adalah tangent (***tg***) dari sudut yang dibentuknya terhadap sumbu absis ***x.*** Sudut tangent adalah perbandingan antara sumbu vertical ***y*** dengan sumbu horizontal ***x***.



V. Hubungan Dua Garis Lurus

- Dua garis lurus akan **berimpit** apabila persamaan yang satu merupakan **kelipatan** persamaan yang lain
  contoh : y = 1/2x + 2 dan 2y = x + 4
- Dua garis akan **sejajar** // apabila **mempunyai gradien yang sama**
  contoh : y = -1/3x +3 dan y = -1/3x + 2/3
- Dua garis akan **berpotongan** apabila gradien yang satu tidak sama dengan gradien garis lain.
  contoh : y = -3 + 2x dan y = 2 + 1/2x
- Dua garis akan **berpotongan tegak lurus** apabila gradien yang satu merupakan kebalikan negatif dari gradien persamaan garis yang lain.
  contoh : 3y = 2x – 6 dan y = -3/2x



VI. Koordinat Titik Potong 2 Fungsi

Titik potong dari dua buah garis adalah titik yang dimiliki oleh kedua garis tersebut dengan koordinat (***x,y***) yang sama. Untuk mendapatkan titik koordinat (***x,y***) yang sama tersebut, caranya adalah dengan melakukan subsitusi dari kedua garis tersebut. Misalkan suatu garis *g* dengan persamaan y = m*x* + n memotong garis *h* dengan persamaan y = p*x* + q, pada suatu titik sebut saja titik A (x_a,y_a), maka kordinat titik A itu memenuhi persamaan baik garis *g* maupun garis *h*.

Contoh :

Carilah titik potong antara garis *g* dengan persamaan y = 3*x* + 6 dengan garis *h* yang mempunyai persamaan y = 5*x* – 10

Jawab :

Titik dimana koordinatnya dimiliki oleh kedua garis tersebut dengan nilai koordinat yang sama, maka titik koordinat itu terjadi pada saat **garis *g* = garis *h***.

$$
\begin{aligned}
3x + 6 &= 5x - 10 \\
6 + 10 &= 5x - 3x \\
16 &= 2x \\
8 &= x
\end{aligned}
$$

Jika, x = 8 maka **nilai y dapat diperoleh dengan mensubstituskan nilai x kedalam salah satu garis.**

Garis g : → y = 3x + 6
y = 3(8) + 6
y = 24 +6
y = 30

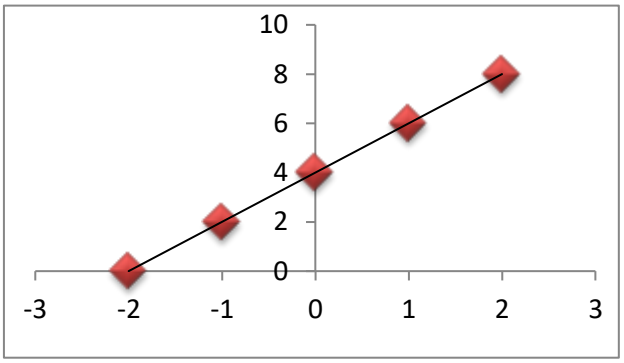
Jadi, titik potong kedua garis itu terjadi di titik koordinat (8,30)

VII. Menggambar Fungsi Linier

Ada 2 cara yang dapat digunakan untuk menggambar suatu grafik fungsi linear, yaitu:

a. Dengan cara sederhana (*curve traicing process)*
Yaitu dengan menggunakan tabel x dan y, dimana kita tentukan dulu nilai x sebagai variabel bebas, dengan memasukkan beberapa nilai x kita akan memperoleh nilai y.
Misalkan : y = 4 + 2x

x	-2	-1	0	1	2
y	0	2	4	6	8

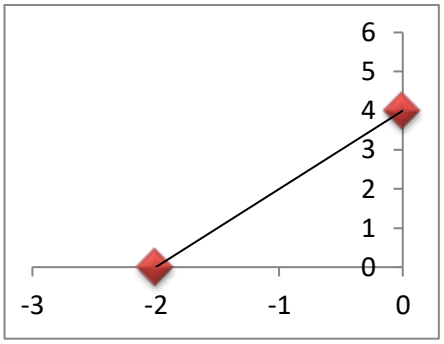


Kemudian kita tinggal memplotkan masing-masing pasangan titik tersebut.

b. Dengan cara matematis (menggunakan ciri-ciri yang penting)
Yaitu dengan mencari titik potong untuk sumbu x dan juga sumbu y.
- Titik potong fungsi dengan sumbu y, yakni pada x=0, maka y=a.
  Jadi titiknya adalah A(0,a)
- Titik potong fungsi dengan sumbu x, yakni pada y=0, maka x=b.
  Jadi titiknya adalah B(b,0)

Hubungkan kedua titik untuk menentukan garis persamaan liniernya.

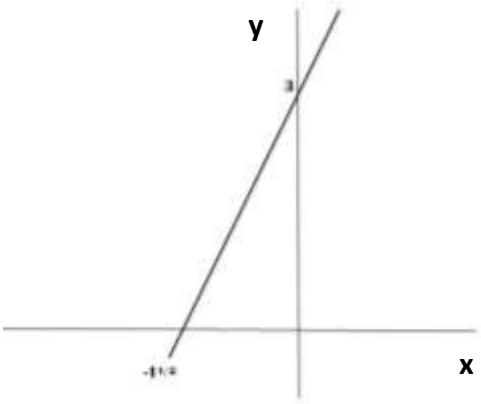
Contoh 1 : Diketahui y = 4 + 2x.
Maka grafik fungsi dapat digambarkan menggunakan ciri-ciri penting, yaitu:
1) Titik potong fungsi dengan sumbu y, x=0, maka y=4. Jadi titiknya adalah A(0,4)
2) Titik potong fungsi dengan sumbu x, y=0, maka x=-2. Jadi titiknya adalah B(-2,0)



Contoh 2 : Diketahui fungsi linear y = 2x + 3
Sebenarnya untuk menggambarkan grafik fungsi linier cukup ditentukan oleh 2 titik saja, yaitu :

Apabila x = 0 maka y = 2(0) + 3 = 3 → Titik (0,3)
Apabila y = 0 maka 0 = 2x + 3
X = -3/2 → Titik (-3/2,0)

x	0	-3/2
y	3	0



Latihan Soal :

1. Gambarkan grafik fungsi: Y = 3X + 2
2. Sebuah garis membentuk sudut 135^0 dengan sumbu X positif dan melewati titik (3,4). Ditanyakan persamaan garis serta gambarkan grafik fungsinya dan apakah garis itu melewati titik P(2,3) dan titik Q(2,5) ?
3. Sebuah garis melewati titik A(2,1) dan B(3,4). Ditanyakan persamaan garisnya!
4. Hitung titik potong P dari dua persamaan garis :
   a. Y = 4X + 2 dan Y = X – 4 b. 3x + 2y = 6 dan 2x – 4y = 4
5. Tentukan persamaan garis yang melalui titik (-2, 1) dan gradien -2

BAB III
APLIKASI FUNGSI LINEAR DALAM EKONOMI

I. Fungsi Permintaan, Fungsi Penawaran, dan Keseimbangan Pasar

A. Fungsi Permintaan

Fungsi permintaan menunjukkan hubungan antara jumlah produk yang diminta oleh konsumen dengan variabel – variabel lain yang memengaruhinya pada suatu periode tertentu. Variabel – variabel ini bila ditelusuri dalam perekonomian yang sesungguhnya sangat banyak jumlahnya. Akan tetapi, umumnya para ahli ekonomi berasumsi bahwa jumlah produk yang akan diminta oleh konsumen selama suatu periode waktu tertentu tergantung pada variabel utama, yaitu:

a. Harga barang itu sendiri
b. Harga barang lain
c. Pendapatan konsumen
d. Prediksi harga dimasa mendatang
e. Selera masyarakat

Fungsi permintaan juga mematuhi **hukum permintaan**, dimana ketika harga barang naik, maka kuantitas barang yang diminta akan turun dan juga sebaliknya. Hal ini menunjukkan bahwa harga barang dan permintaan atau kuantitas yang diminta memiliki hubungan negatif, oleh karena itu fungsi permintaan akan selalu negatif. Kurva permintaan bergerak dari kanan atas ke kanan bawah. Bentuk umum fungsi permintaan, yaitu:

$$\mathbf{Q_d = a - bP_d}$$

a = konstanta
b = $\Delta Qd / \Delta Pd$
P_d = harga barang per unit yang diminta
Q_d = banyaknya unit barang yang diminta

B. Fungsi Penawaran

Penawaran atau supply merupakan kuantitas barang dan jasa yang tersedia dan ditawarkan oleh produsen kepada konsumen pada setiap tingkat harga selama periode tertentu. Asumsi ceteris paribus.

Penawaran ditentukan oleh banyak faktor, seperti harga bahan baku dan jumlah produsen di pasar. **Hukum penawaran**, yaitu apabila harga barang naik, maka kuantitas yang ditawarkan akan naik. Begitu juga sebaliknya, jika harga barang turun, maka kuantitas barang yang ditawarkan akan berkurang. Hal ini menunjukkan bahwa penwaran dan harga barang memiliki hubungan positif. Kurva fungsi penawaran bergerak dari kiri bawah ke kanan atas. Bentuk umum fungsi penawaran, yaitu:

$$\mathbf{Q_s = a + bP_s}$$

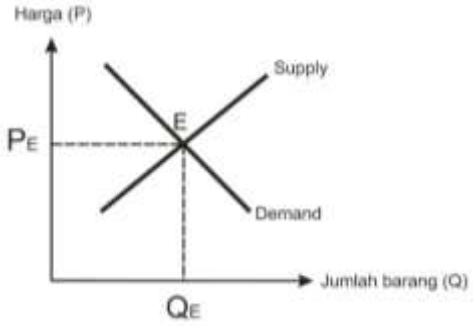
a = konstanta
b = $\Delta Qs / \Delta Ps$
Ps = harga barang per unit yang ditawarkan
Qs = banyaknya unit barang yang ditawarkan

C. Keseimbangan Pasar

Keseimbangan pasar akan menciptakan harga dan jumlah keseimbangan (*Equilibrium*) di pasar. Syarat untuk mencapai keseimbangan pasar adalah jumlah produk yang diminta oleh konsumen harus sama dengan jumlah produk yang ditawarkan oleh produsen ($\mathbf{Q_d = Q_s}$), atau harga produk yang diminta oleh konsumen harus sama dengan harga produk yang ditawarkan oleh produsen ($\mathbf{P_d = P_s}$). Keseimbangan pasar secara aljabar dapat diperoleh dengan menyamakan persamaan fungsi permintaan dan fungsi penawaran. Sedangkan secara geometri ditunjukkan oleh *perpotongan antara kurva permintaan dengan kurva penawaran*.

$$\mathbf{Q_d = Q_s} \quad \text{atau} \quad \mathbf{P_d = P_s}$$

Q_d = Jumlah barang yang diminta (demand)
Q_s = Jumlah barang yang ditawarkan (supply)
E = Keseimbangan pasar
P_e = Harga keseimbangan
Q_e = Jumlah keseimbangan



D. Efek Pajak pada Keseimbangan Pasar

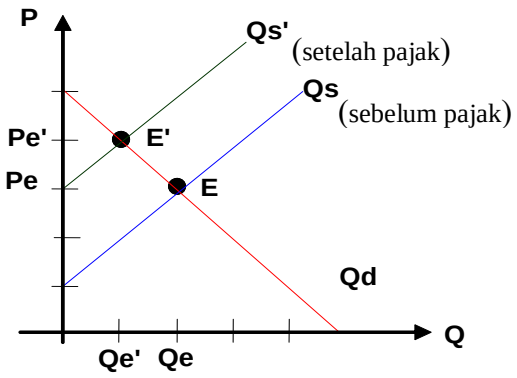
Penjualan atas suatu produk biasanya dikenakan pajak oleh pemerintah. Jika, produk tersebut dikenakan pajak **t** perunit, maka akan terjadi perubahan keseimbangan pasar atas produk tersebut, baik harga maupun jumlah keseimbangan. Jika pemerintah mengenakan pajak **t** perunit pada produk tertentu akan mengakibatkan harga produk tersebut naik dan jumlah yang diminta atau ditawarkan atas barang tersebut akan berkurang. Hal ini dikarenakan bahwa produsen biasanya mengalihkan tanggungan pajaknya sebagian kepada konsumen yang akan membeli produk tersebut.

Fungsi penawaran setelah dikenakan pajak t perunit adalah :

$$Ps' = a + bQ + t$$

$$Qs' = a + b(P - t)$$

Keseimbangan pasar sebelum dan sesudah pajak dapat digambarkan sebagai berikut :



Keterangan :
Q_d = jumlah permintaan sebelum & sesudah pajak
Q_s = jumlah penawaran sebelum pajak
Q'_s = jumlah penawaran sesudah pajak
E = titik keseimbangan sebelum pajak
E' = titik keseimbangan sesudah pajak
P_e = harga keseimbangan sebelum pajak
P'_e = harga keseimbangan sesudah pajak
Q_e = jumlah keseimbangan sebelum pajak
Q'_e = jumlah keseimbangan sesudah pajak

- Beban pajak per unit yang ditanggung oleh konsumen : **tk = Pe' – Pe**
- Beban pajak total yang ditanggung oleh konsumen : **TK = tk x Qe'**
- Beban pajak per unit yang ditanggung oleh produsen : **tp = t – tk**
- Beban pajak per unit yang ditanggung oleh produsen : **TP = tp x Qe'**
- Jumlah pajak total yang diterima oleh pemerintah : **T = t x Qe'** atau **T = TK + TP**

Contoh :
Fungsi permintaan akan suatu barang ditunjukkan oleh persamaan P = 15 – Q, sedangkan penawaranannya P = 3 + 0.5 Q. Terhadap barang tersebut dikenakan pajak sebesar 3 perunit. Berapa harga dan jumlah keseimbangan sebelum pajak dan berapa pula harga dan jumlah keseimbangan sesudah pajak ?

Jawab:
Sebelum pajak, Keseimbangan pasar : $\mathbf{P_d = P_s}$

$$15 - Q = 3 + 0.5\,Q$$
$$15 - 3 = 0{,}5\,Q + Q$$
$$12 = 1{,}5Q$$
$$Q = 12/1{,}5 = 8 \;\rightarrow\; P = 15 - Q$$
$$= 15 - 8 = 7$$

Atau Qd = Qs , dimana :
P = 15 – Q → Q = 15 – P
P = 3 + 0.5 Q → Q = 2P - 6
Keseimbangan pasar sebelum pajak : Qd = Qs

$$15 - P = 2P - 6$$
$$15 + 6 = 2P + P$$
$$21 = 3P$$
$$P = 21/3 = 7 \;\rightarrow\; Q = 15 - P$$
$$Q = 15 - 7 = 8$$

Jadi harga dan jumlah keseimbangan sebelum pajak Pe = 7 dan Qe = 8.

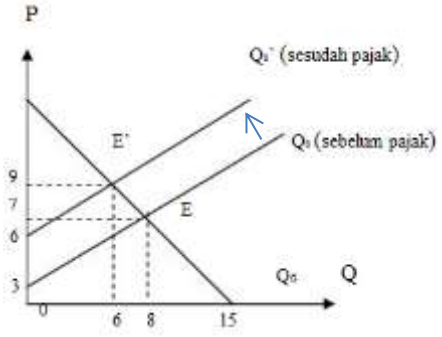
Sesudah pajak, harga jual yang ditawarkan oleh produsen menjadi lebih tinggi.
Persamaan penawaran berubah dan kurva bergeser ke atas.
Fungsi Penawaran sebelum pajak : P = 3 + 0.5 Q
Fungsi Penawaran sesudah pajak : P' = 3 + 0.5 Q + 3

$$Ps' = 6 + 0.5\,Q \;\rightarrow\; Qs' = -12 + 2\,P$$

Persamaan permintaan tetap : Qd = 15 – P
Keseimbangan pasar : Qd = Qs'

$$15 - P = -12 + 2P$$
$$27 = 3P$$
$$P = 9 \;\rightarrow\; Q = 15 - P$$
$$= 15 - 9 = 6$$

Jadi, harga dan jumlah keseimbangan sesudah pajak :
Pe' = 9 dan Qe' = 6



- Beban pajak per unit yang ditanggung oleh konsumen :
  tk = Pe' – Pe = 9 – 7 = 2
- Beban pajak total yang ditanggung oleh konsumen :
  TK = tk x Qe' = 2 x 6 = 12
- Beban pajak per unit yang ditanggung oleh produsen :
  tp = t – tk = 3 – 2 = 1
- Beban pajak per unit yang ditanggung oleh produsen :
  TP = tp x Qe' = 1 x 6 = 6
- Jumlah pajak total yang diterima oleh pemerintah :
  T = t x Qe'= 3 x 6 = 18 atau T = TK + TP = 12 + 6 = 18

E. Efek Subsidi pada Keseimbangan Pasar

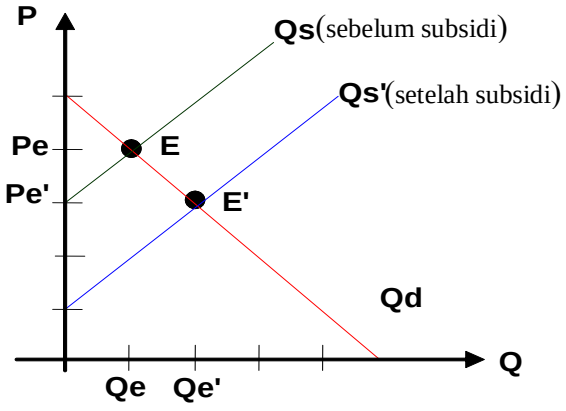
Jika pemerintah memberi subsidi atas suatu produk tertentu, harga yang dibayar oleh konsumen akan turun, sedangkan jumlah yang diminta atas produk tersebut akan bertambah. Penurunan harga tersebut adalah sebesar subsidi **s** yang diberikan oleh pemerintah. Secara, geometri, penurunan harga ini adalah pergeseseran kurva penawaran sejauh **s** per unit.

Fungsi penawaran setelah diberikan subsidi :

$$Ps' = a + bQ - s$$

$$Qs' = a + b(P + s)$$

Keseimbangan pasar sebelum dan sesudah subsidi dapat digambarkan sebagai berikut :



Keterangan :

Q_d	=jumlah permintaan sebelum & sesudah subsidi
Q_s	= jumlah penawaran sebelum subsidi
Q'_s	= jumlah penawaran sesudah subsidi
E	= titik keseimbangan sebelum subsidi
E'	= titik keseimbangan sesudah subsidi
P_e	= harga keseimbangan sebelum subsidi
P'_e	= harga keseimbangan sesudah subsidi
Q_e	= jumlah keseimbangan sebelum subsidi
Q'_e	= jumlah keseimbangan sesudah subsidi

- Subsidi per unit yang dinikmati oleh konsumen : $s_k = P_e - P_e'$
- Subsidi total yang dinikmati oleh konsumen : $SK = s_k \times Q_e'$
- Subsidi per unit yang dinikmati oleh produsen : $s_p = s - s_k$
- Subsidi total yang dinikmati oleh produsen : $SP = s_p \times Q_e'$
- Jumlah subsidi yang dibayarkan oleh pemerintah : $S = s \times Q_e'$

Contoh :
Fungsi permintaan akan suatu barang ditunjukkan oleh persamaan P = 15 – Q, sedangkan penawaranannya P = 3 + 0.5 Q. Terhadap barang tersebut dikenakan subsidi sebesar 1,5 perunit. Berapa harga dan jumlah keseimbangan sebelum subsidi dan berapa pula harga dan jumlah keseimbangan sesudah subsidi ?

Jawab:
Sebelum subsidi, Keseimbangan pasar : $\mathbf{P_d = P_s}$

$$15 - Q = 3 + 0.5\,Q$$
$$Q = 8 \quad \rightarrow \quad P = 15 - 8 = 7$$

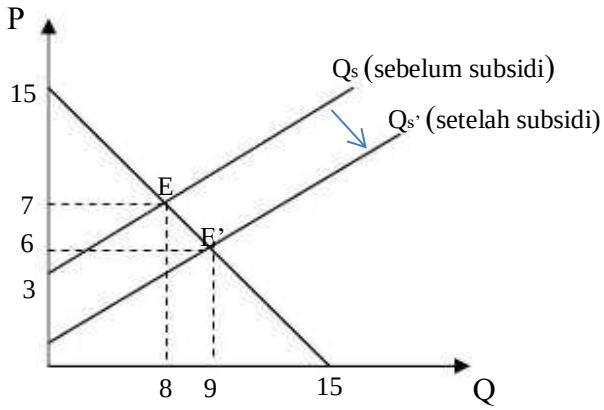
Harga dan jumlah keseimbangan sebelum subsidi : Pe = 7 dan Qe = 8 (contoh di atas).
Sesudah subsidi, harga jual yang ditawarkan oleh produsen menjadi lebih rendah
Persamaan penawaran berubah dan kurva bergeser ke bawah.
Penawaran sebelum subsidi : P = 3 + 0.5 Q
Penawaran sesudah subsidi : P' = 3 + 0.5 Q – 1,5

$$Ps' = 1{,}5 + 0.5\,Q \quad \rightarrow \quad Qs' = -3 + 2\,P$$

Persamaan permintaan tetap : Qd = 15 – P
Keseimbangan pasar : Qd = Qs'

$$15 - P = -3 + 2P$$
$$18 = 3P$$
$$P = 6 \quad \rightarrow \quad Q = 15 - P$$
$$= 15 - 6 = 9$$

Jadi, harga dan jumlah keseimbangan sesudah subsidi : Pe' = 6 dan Qe' = 9



- Subsidi per unit yang dinikmati oleh konsumen :
  $s_k = P_e - P_e' = 7 - 6 = 1$
- Subsidi total yang dinikmati oleh konsumen :
  $SK = s_k \times Q_e' = 1 \times 9 = 9$
- Subsidi per unit yang dinikmati oleh produsen :
  $s_p = s - s_k = 1{,}5 - 1 = 0{,}5$
- Subsidi total yang dinikmati oleh produsen :
  $SP = s_p \times Q_e' = 0{,}5 \times 9 = 4{,}5$
- Jumlah subsidi yang dibayarkan oleh pemerintah :
  $S = s \times Q_e' = 1{,}5 \times 9 = 12{,}5$ atau $S = SK + SP = 9 + 4{,}5 = 12{,}5$

II. Fungsi Biaya, Fungsi Penerimaan, dan Analisi Pulang Pokok (BEP)

A. Fungsi Biaya

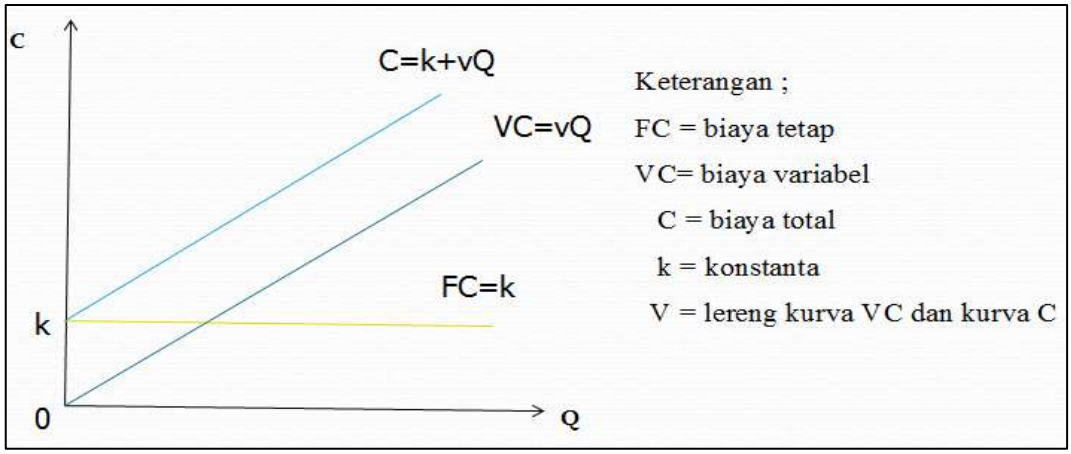
Fungsi biaya merupakan hubungan antara biaya dengan jumlah produksi yang dihasilkan. Fungsi biaya dapat digambarkan ke dalam kurva dan kurva biaya menggambarkan titik – titik kemungkinan besarnya biaya di berbagai tingkat produksi.

Dalam membicarakan biaya ada beberapa macam biaya, yaitu:

1. Biaya Total (Total Cost = TC = C)
   TC = AC x Q atau **TC = FC + VC**

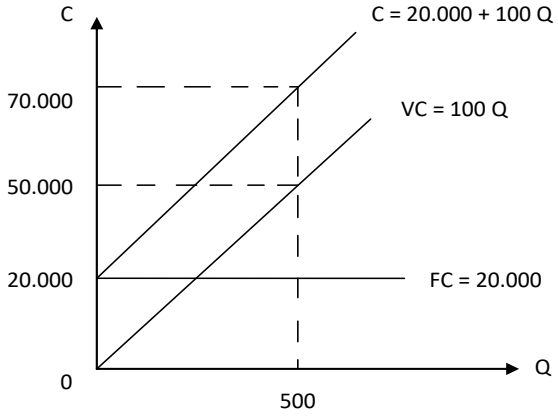
   TC = AC x Q

2. Biaya Variabel (Variable Cost = VC)
   VC = AVC x Q
   Biaya variabel tergantung pada jumlah produk yang dihasilkan, artinya apabila jumlah produk yang dihasilkan berubah maka biaya variabel akan berubah juga.
3. Biaya Tetap (Fixed Cost = FC)
   FC = AFC x Q
   Biaya tetap tidak tergantung pada jumlah produk yang dihasilkan, sehingga biaya ini tidak berubah (konstan), walaupun berapa banyak jumlah yang dihasilkan dalam suatu skala tertentu.
4. Biaya Total Rata – Rata (Average Total Cost = AC)
   $$\mathbf{AC} = \frac{\mathbf{TC}}{\mathbf{Q}} = \frac{\mathbf{FC + VC}}{\mathbf{Q}}$$
5. Biaya Variabel Rata – Rata (Average Variable Cost) : $\mathbf{AVC} = \frac{\mathbf{VC}}{\mathbf{Q}}$
6. Biaya Tetap Rata – Rata (Average Fixed Cost) : $\mathbf{AFC} = \frac{\mathbf{FC}}{\mathbf{Q}}$
7. Biaya Marginal (Marginal Cost = MC)
   $$\mathbf{MC} = \frac{\mathbf{\Delta\, TC}}{\mathbf{\Delta\, Q}} = \frac{\mathbf{TC2 - TC1}}{\mathbf{Q2 - Q1}}$$



Contoh :

Biaya tetap yang dikeluarkan oleh sebuah perusahaan sebesar Rp 20.000 sedangkan biaya variabelnya ditunjukkan oleh persamaan VC = 100 Q. Tunjukkan persamaan dan kurva biaya totalnya ! Berapa biaya total yang dikeluarkan jika perusahaan tersebut memproduksi 500 unit barang ?



FC = 20.000 , VC = 100 Q

C = FC + VC

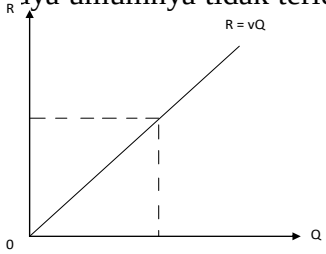
C = 20.000 + 100 Q

Jika Q = 500,

C = 20.000 + 100(500) = 70.000

B. Fungsi Penerimaan

Pengertian penerimaan adalah seluruh pendapatan yang diterima dari hasil penjualan barang pada tingkat harga tertentu. Dalam menganalisa biaya umumnya tidak terlepas dari analisa penerimaan atau **total revenue**.



- Penerimaan Total (***Total Revenue*** = TR)
  TR = f(Q)
  TR = P x Q
  P = Harga barang
  Q = Jumlah barang yang dijual

- Penerimaan Marjinal (***Marginal Revenue*** = MR)
  Yaitu : tambahan penerimaan sebagai akibat dari bertambahnya satu unit produksi.
  MR = R' = f'(Q)

$$\mathbf{MR} = \frac{\Delta \mathbf{TR}}{\Delta \mathbf{Q}} = \frac{\mathbf{TR2 - TR1}}{\mathbf{Q2 - Q1}}$$

- Penerimaan Rata–Rata (***Average Revenue*** = AR)
  Yaitu : penerimaan per unit / penerimaan tiap unit produksi.

$$\mathbf{AR} = \frac{\mathbf{TR}}{\mathbf{Q}}$$

Contoh:

Harga jual produk yang dihasilkan oleh sebuah perusahaan Rp. 200,00 perunit. Tunjukkan persamaan penerimaan total perusahaan tersebut. Berapa besar penerimaan apabila terjual barang sebanyak 350 unit? Berapa tambahan ?penerimaan diterima produsen jika jumlah yang terjual meningkat dari 200 unit menjadi 350 unit

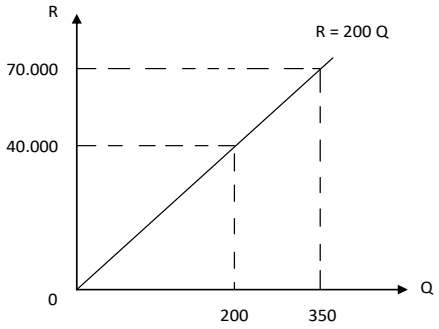
Jawab:

TR = P x Q

TR = 200 x Q

TR = 200Q

Bila Q = 350, maka TR = 200 (350) = 70.000



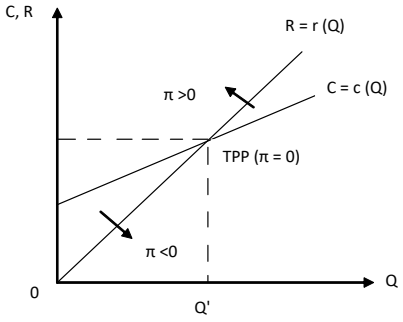
C. Fungsi Keuntungan

Biaya atau ongkos pengertian secara ekonomis merupakan beban yang harus dibayarkan produsen untuk menghasilkan barang dan jasa sampai barang tersebut siap untuk dikonsumsi.

Berdasarkan konsep biaya dan penerimaan dapat diketahui beberapa kemungkinan, diantaranya:

$$\pi = TR - TC$$

- $\pi > 0 \rightarrow$ TR > TC = Keadaan untung / laba
- $\pi = 0 \rightarrow$ TR = TC = Keadaan Break Even Point (BEP)
- $\pi < 0 \rightarrow$ TR < TC = Keadaan rugi



D. Analisis Pulang Pokok (Break Even Point-BEP / Balik Modal / Impas)

Analisis pulang pokok yaitu suatu konsep yang digunakan untuk menganalisis jumlah minimum produk yang harus dihasilkan atau terjual agar perusahaan tidak mengalami kerugian. Keadaan pulang pokok ($\pi = 0$) terjadi apabila TR = TC; perusahaan tidak memperoleh keuntungan tetapi tidak juga menderita kerugian.

Break Even Point atau titik pulang pokok merupakan titik keseimbangan antara jumlah hasil penjualan dengan jumlah biaya produksi. Analisis ini digunakan untuk mencari hubungan antara biaya tetap, biaya variabel, keuntungan, dan volume penjualan.

Unsur–unsur perhitungan titik pulang pokok sebagai berikut:

a. Penggolongan biaya perusahaan menjadi biaya tetap dan biaya variabel.
b. Besarnya biaya variabel secara keseluruhan berubah – ubah sebanding dengan volume penjualan
c. Besarnya biaya tetap tidak berubah.
d. Analisis harga jual perunit tidak berubah.
e. Perusahaan hanya memproduksi satu macam produk.

Contoh :

Sebuah pabrik sendal dengan merk "idaman" mempunyai biaya tetap 1.000.000; biaya untuk membuat sepasang sendal Rp 500; apabila sandal tersebut dijual dengan harga Rp 1000, maka:

a. Fungsi biaya total, fungsi penerimaan total, dan variabel cost.
b. Pada saat kapan pabrik sendal mencapai BEP
c. Untung atau rugikah apabila memproduksi 9.000 unit

Jawab:

a. FC = Rp. 1.000.000
   VC = Rp 500 / unit
   P = 1.000
   Fungsi biaya total : C = FC + VC = 1.000.000 + 500Q
   Fungsi penerimaan total : TR = P x Q = 1.000Q
   Fungsi biaya variabel : VC = 500Q

b. Break Even Point terjadi pada TR = TC
   $1.000Q = 1.000.000 + 500Q$
   $1.000Q - 500Q = 1.000.000$
   $500Q = 1.000.000$
   $Q = 2.000$ unit

c. Pada saat memproduksi 9.000 unit
   TR = P x Q
   TR = 1.000 x 9000
   TR = 9.000.000
   TC = 1.000.000 + 500Q
   TC = 1.000.000 + 500 (9.000)
   TC = 1.000.000 + 4.500.000
   TC = 5.500.000
   Π = TR – TC = 9.000.000 – 5.500.000 = Rp. 3.500.000.

   Bila TR > TC maka pabrik dalam keadaan laba / untung sebesar Rp 3.500.000

Latihan Soal :

1. Andaikan biaya total yang dikeluarkan perusahaan ditunjukan oleh persamaan C = 20.000 + 100 Q dan penerimaan totalnya R = 200 Q.
   a. Pada tingkat produksi berapa unit perusahaan mengalami pulang pokok ?
   b. Apa yang terjadi jika perusahaan memproduksi 150 unit ?
   c. Gambarkan grafik fungsi biaya dan fungsi penerimaan pada kondisi BEP !

2. Sebuah perusahaan mendapatkan keuntungan Rp 2.000.000 dari penjualan barang sebanyak 1.500 unit. Penerimaan yang diperoleh perusahaan tersebut Rp 30.000.000 sedangkan biaya tetap yang dikeluarkannya guna memproduksi barang yang dijualnya Rp 13.000.000. Tentukan :
   a. Fungsi Penerimaan, Fungsi Biaya Variabel dan Fungsi Biaya Totalnya?
   b. Pada tingkat produksi atau penjualan berapa unit perusahaan tersebut dapat menutupi biaya total yang dikeluarkannya ?
   c. Pada tingkat produksi atau penjualan berapa unit perusahaan ini dapat menutupi biaya tetap yang dikeluarkannya?

III. Fungsi Konsumsi, Tabungan, dan Penentuan Pendapatan Nasional

Dalam suatu perekonomian, pendapatan masyarakat suatu negara secara keseluruhan dialokasikan ke dalam dua kategori pengunaan, yaitu untuk keperluan konsumsi dan tabungan. Pada umumnya pendapatan dilambangkan dengan **Y**, sedangkan konsumsi dilambangkan dengan **C**, tabungan dilambangkan dengan **S**, dan investasi dilambangkan dengan **I**.

Menurut **John Maynard Keynes**, pendapatan suatu negara dapat dirumuskan sebagai berikut:

1. Ditinjau dari segi perseorangan
   Y = C + S

2. Ditinjau dari segi perusahaan
   Y = C+ I

Kedua persamaan tersebut berbanding lurus dengan pendapatan nasional. Pada persamaan pertama, jika pendapatan berubah, maka akan berakibat konsumsi dan tabungan juga berubah. Perubahan tersebut dapat ditentukan sebagai berikut:

a. Marginal Propensity to Consume (MPC) adalah angka perbandingan antara besarnya perubahan konsumsi denga besarnya perubahan pendapatan nasional, sehingga dapat dirumuskan:
   MPC $= \frac{\Delta C}{\Delta Y}$

b. Marginal Propensity to Saving (MPS) adalah perbandingan antara bertambahnya tabungan dengan bertambahnya pendapatan nasional, yang dapat dirumuskan sebagai berikut:
   MPS $= \frac{\Delta S}{\Delta Y}$

   Hubungana antara **MPS** dan **MPC :** **MPS + MPC = 1**

A. Fungsi Konsumsi

Fungsi konsumsi pertama kali diperkenalkan oleh seorang ahli ekonomi bernama **John M. Keynes. Keynes** berasumsi bahwa fungsi konsumsi mempunyai beberapa sifat khusus, yaitu:

1. Terdapat sejumlah konsumsi mutlak tertentu untuk mempertahankan hidup walaupun tidak mempunyai pendapatan uang.
2. Konsumsi berhubungan dengan pendapatan yang dapat dibelanjakan (*disposable income*)
3. Jika pendapatan yang siap dibelanjakan meningkat, maka konsumsi juga akan meningkat walaupun dalam jumlah yang lebih sedikit.
4. Proporsi kenaikan pendapatan yang siap dibelanjakan untuk konsumsi adalah konstan. Proporsi ini disebut sebagai kecenderungan konsumsi marginal.

Berdasarkan keempat asumsi di atas, maka fungsi konsumsi dapat ditulis ke dalam bentuk persamaan sebagai berikut:

$$\mathbf{C = a + bY_d} \qquad \rightarrow \qquad C = Co + c.Y$$

di mana: C = Konsumsi
a = Konsumsi dasar tertentu yang tidak tergantung pendapatan = Co.
b = Kecenderungan konsumsi marginal (MPC) = c
Y_d = Pendapatan yang dapat dibelanjakan (diasumsikan Yd = Y)

Untuk mengetahui besarnya a, dapat dihitung dengan menggunakan rumus:

$$\mathbf{a = (APC - MPC)Y}$$

APC = ***Average Propensity to Consume*** adalah perbandingan antara besarnya konsumsi pada suatu tingkat konsumsi dengan besarnya tingkat pendapatan nasional.

$$\mathbf{APC = \frac{C}{Y}}$$

Dalam fungsi konsumsi, kita juga harus mengetahui tingkat pendapatan *Break Even Income* (BEI). Adapun maksud dari tingkat pendapatan BEI di mana besarnya pendapatan sama dengan besarnya pengeluaran untuk konsumsi. **Y = C** atau **S = 0**

B. Fungsi Tabungan

Fungsi tabungan menunjukkan hubungan antara tabungan dengan pendapatan.
Fungsi tabungan dapat ditentukan sebagai berikut:

Y = C + S
S = Y – C, di mana C = a + bY
Sehingga, S = Y – (a + bY)
S = Y – a – bY

Jadi, fungsi tabungan dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\mathbf{S = -a + (1 - b)Y}$$

di mana : S = Tabungan dan (1– b) = MPS

C. Angka Pengganda Pendapatan (Multiplier)

Angka pengganda pendapatan adalah angka yang menunjukkan konsumsi dan tabungan karena adanya perubahan pendapatan nasional. Angka pengganda biasa ditulis dengan huruf ***k*** dan dirumuskan sebagai berikut:

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1-MPC}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{MPS}}$$

D. Model Penentuan Pendapatan Nasional

Pendapatan nasional adalah salah satu indikator untuk dapat mengukur lajunya tingkat pembangunan dan perkembangan kesejahteraan pada suatu Negara dari waktu ke waktu. Dengan pendapatan nasional juga dapat diketahui arah, tujuan, dan struktur perekonomian suatu Negara.

Metode perhitungan pendapatan nasional merupakan salah satu cara untuk menentukan jumlah atau besar dari nilai pendapatan nasional tersebut. Selain untuk mengetahui jumlah pendapatan nasional suatu negara, metode perhitungan pendapatan nasional juga bisa dijadikan alat evaluasi. Di mana, Negara bisa menilai dan mengevaluasi kinerja para sumber daya manusianya dan mengukur produktivitas negaranya.

Terdapat 3 metode untuk menghitung pendapatan nasional, yaitu:

a. Metode pendekatan produksi

Kegiatan produksi adalah kegiatan yang menciptakan nilai tambah (value added). Jadi pada perhitungan pendekatan produksi, hanya mencakup perhitungan niai tambah pada setiap sektor (lahan) produksi. Dengan pendekatan ini, pendapatan nasional dihitung dengan cara menjumlahkan nilai tambah (value added) dari seluruh sektor produksi selama satu periode tertentu (biasanya dalam satu tahun).

Nilai tambah yang dimaksud di sini adalah selisih antara nilai produksi (nilai output) dengan nilai biaya antara (nilai input), yang terdiri atas bahan yang terlibat dalam proses produksi termasuk bahan baku dan bahan penolong.

$$\mathbf{Y = (P_1 \times Q_1) + (P_2 \times Q_2) + \ldots (P_n \times Q_n)}$$

Di mana:

Y = Pendapatan nasional
P_1 = harga barang ke-1
P_n = harga barang ke-n
Q_1 = jenis barang ke-1
Q_n = jenis barang ke-n

b. Metode pendekatan pendapatan

Pendekatan pendapatan (income a product) adalah jenis pendekatan pendapatan nasional yang diperoleh dengan cara menjumlahkan pendapatan dari berbagai faktor produksi yang memberikan sumbangan terhadap proses produksi. Metode pendekatan pendapatan merupakan pendapatan nasional hasil dari penjumlahan seluruh penerimaan yang diterima oleh pemilik faktor produksi dalam suatu negara selama satu periode atau satu tahun.

Yang termasuk faktor produksi adalah tenaga kerja, modal, tanah, dan keahlian/kewirausahaan. Masing-masing dari faktor produksi akan menghasilkan pendapatan yang berbeda-beda, misalnya:
– Tenaga kerja dapat memperoleh gaji/upah
– Pemilik modal akan mendapat bunga
– Pemilik tanah dapat memperoleh sewa
– Keahlian atau skill dapat memperoleh laba.

Rumus pendekatan pendapatan adalah sebagai berikut:

$$\mathbf{Y = r + w + i + p}$$

di mana :

Y = Pendapatan Nasional
r = Pendapatan dari upah, gaji, dan lainnya
w = Pendapatan bersih dari sewa
i = Pendapatan dari bunga
p = Pendapatan dari keuntungan perusahaan dan usaha perorangan

c. Metode pendekatan pengeluaran

Perhitungan dengan menggunakan pendekatan pengeluaran dilakukan dengan cara menjumlahkan seluruh pengeluaran berbagai sektor ekonomi, yaitu rumah tangga, pemerintah, perusahaan, dan masyarakat luar negeri suatu negara pada periode tertentu.

Jenis pengeluaran dari masing-masing pelaku ekonomi terdiri dari
– Pengeluaran untuk konsumsi (C)
– Pengeluaran untuk investasi (I)
– Pengeluaran untuk pemerintah (G)
– Pengeluaran untuk ekspor (X), dan impor (M).

Sehingga diperoleh rumus pendekatan pengeluaran sebagai berikut:

$$\mathbf{Y = C + I + G + (X – M)}$$

di mana:

Y = Pendapatan nasional
C = consumption (konsumsi rumah tangga)
I = investment (investasi)
G = government expenditure (pengeluaran pemerintah)
X = ekspor
M = impor

Contoh :

1. Diketahui pendapatan Sarah Rp.1.200juta perbulan, besar konsumsi nya Rp.1.100juta perbulan. Dan pada saat pendapatan Sarah berubah menjadi Rp.1.400juta perbulan, besar konsumsi pun ikut berubah menjadi Rp.1.250juta perbulan . Tentukan bentuk fungsi konsumsi dan tabungan dari soal tersebut?

Jawab :

Diketahui:

Y = 1.200juta Y1 =1.250 juta

C = 1.100juta C1 =1.400 juta

Jawab:

- APC = $\frac{C}{Y}$

  APC = $\frac{1100}{1200}$ = 0,92

- MPC = b = $\frac{C1-C}{Y1-Y}$ = $\frac{1250-1100}{1400-1200}$ = $\frac{150}{200}$ = 0,75

Maka besarnya a = (APC-MPC) × Y

a = (0,92-0,75)× 1.200juta

a = 0,17 × 1.200juta

a = 204 juta

Jadi, fungsi konsumsinya : C = a +by

C = 204juta +0.75y

2. Rudi Sebelum bekerja (Y) = 0, jumlah konsumsinya (C) =Rp 100.000. Setelah bekerja dan memperoleh penghasilan (Y) = Rp 700.000, konsumsinya (C) sebesar Rp 450.000. Tentukan Fungsi Tabungannya! Berapa konsumsi dan tabungan jika pendapatan sebesar Rp 800.000 ? Berapa besar tabungan jika konsumsi Rp 400.000 ?
   Berapa besar angka pengganda pendapatannya ?

Jawab :

Diketahui : $Y_1 = 0 \rightarrow C_1 = 100.000$

$Y_2 = 700.000 \rightarrow C_2 = 450.000$

$$\frac{Y - Y1}{Y2 - Y1} = \frac{C - C1}{C2 - C1} \rightarrow \frac{Y - 0}{700.0000 - 0} = \frac{C - 100.000}{450.000 - 100.000}$$

$$35 . Y = 70 (C - 100.000)$$

$$Y = \frac{70\,(C - 100.000)}{35}$$

$$Y = 2C - 200.000$$

Fungsi Konsumsi : $C = 100.000 + 0{,}5\,Y$

Fungsi Tabungan : $S = -1000.000 + 0{,}5\,Y$

Jika pendapatan : Y= 800.000 $\rightarrow C = 100.000 + 0{,}5\,Y$

$= 100.000 + 0{,}5\,(800.000) = 500.000$

$S = -1000.000 + 0{,}5\,Y$

$= -1000.000 + 0{,}5\,(800.000) = 300.000$

Jika konsumsi : C = 400.000 $\rightarrow$ $C = 100.000 + 0{,}5\,Y$

$400.000 = 100.000 + 0{,}5\,Y$

$0{,}5\,Y = 300.000 \rightarrow Y = 600.000$

$S = -1000.000 + 0{,}5\,Y = -1000.000 + 0{,}5\,(600.000) = 200.000$

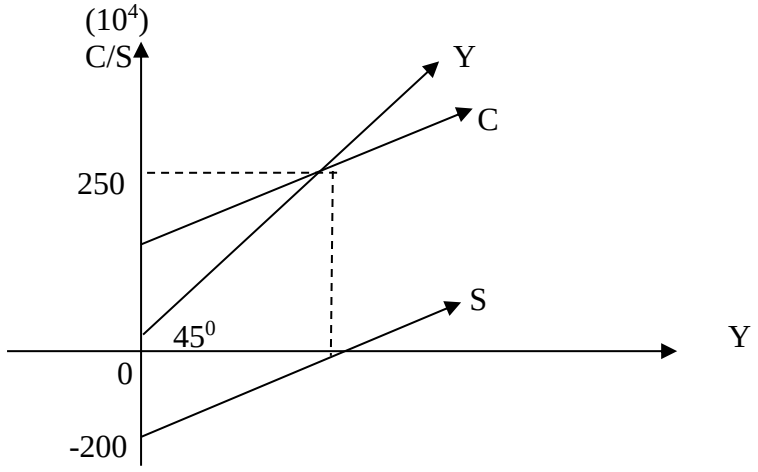
Angka pengganda :

$$\mathbf{k = \frac{1}{MPS} = \frac{1}{0{,}5} = 2}$$

k = 2, artinya : apabila variable ekonomi tertentu (misalnya investasi atau pengeluaran pemerintah) ditambah sejumlah tertentu maka pendapatan nasional akan bertambah sebesar 2 kali tambahan variable tadi.

Latihan Soal :

1. Perhatikan pendapatan, konsumsi dan tabungan seseorang per bulan berdasarkan grafik berikut !



Pertanyaan :

a. Tentukan fungsi konsumsi dan tabungan orang tersebut !
b. Pada pendapatan berapa semuanya habis untuk konsumsi ?
c. Jika tabungan orang tersebut sebesar Rp 40 x 10^4 maka berapa pendapatan dan konsumsinya ?

2. Seorang karyawati suatu perusahaan dapat menyisihkan gajinya untuk ditabung Rp 2.000.000 per bulan. Bila untuk konsumsi yang harus dia keluarkan minimal Rp 1.000.000 per bulan serta kecendrungannya untuk meningkatkan konsumsinya 25 % dari penghasilan. Berapakah besar penghasilan karyawati tersebut dan berapa angka penggandanya?

BAB IV
FUNGSI KUADRAT (PARABOLA)

I. Jenis Fungsi Parabola

Fungsi kuadrat dengan variabel bebas adalah fungsi polinominal tingkat dua.

Bentuk umum fungsi parabola, $Y = f(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2$

Ada dua bentuk persamaan umum untuk parabola yaitu:

1. Persamaan pertama : $Y = f(X) = aX^2 + bX + c$
   - Di mana: Y = Variabel terikat
     X = Variabel bebas
     a, b, dan c = konstanta, dan $a \neq 0$.
   - Diskriminan => **$D = b^2 - 4ac$**
   - Titik puncak = $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a}\right)$

     Titik puncak (vertex) adalah titik di mana arah perubahan fungsi dari menaik ke menurun atau dari menurun ke menarik. Titik puncak adalah titik yang paling bawah (dasar) dari parabola bilamana parabola terbuka ke atas atau titik yang paling atas dari parabola bilamana parabola terbuka ke bawah. Jadi, titik puncak ini dapat berupa titik minimum atau titik maksimum.

   - Mencari koodinat titik potong pada sumbu X dan Y :
     Cari titik potong dengan sumbu y, maka x = 0 → (0, c)
     Cari titik potong dengan sumbu x, maka y = 0 → $aX^2 + bX + c = 0$
     Nilai-nilai penyelesaian untuk X yang juga disebut akar-akar dari persamaan kuadrat dapat diperoleh dengan cara memfaktorkan atau dengan menggunakan rumus kuadrat :

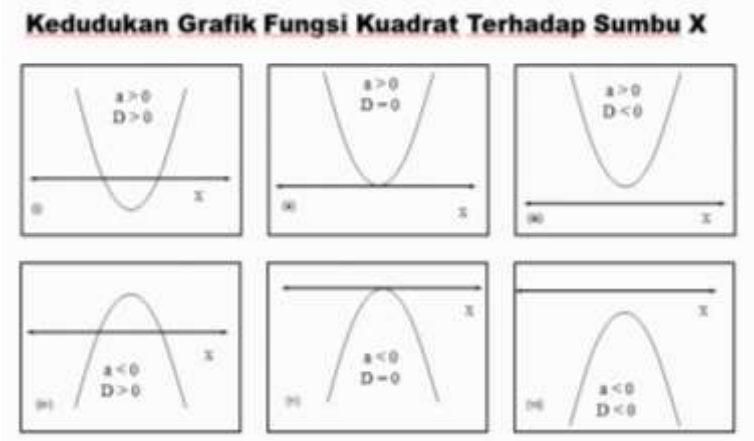
     $$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

     Berbagai akar persamaan kuadrat tergantung dari diskriminannya.
     Jika D = 0 , maka akan didapatkan hanya satu akar dan ini berarti hanya ada satu titik potong dengan sumbu X.
     Jika D < 0, maka persamaan kuadrat tersebut tidak mempunyai akar real yang berarti tidak mempunyai titik potong dengan sumbu X.

   - Sumbu simetri kurva akan sejajar dengan sumbu y.
     Sumbu simetri adalah suatu garis lurus yang melalui titik puncak dan membagi parabola menjadi dua bagian yang sama bentuknya.
     Persamaan sumbu simetris : $x = \frac{-b}{2a}$

- Bentuk kurva dapat berbentuk terbuka ke atas atau terbuka ke bawah.
  - Jika a > 0 dan D > 0, maka parabola akan terbuka ke atas dan memotong sumbu X di dua titik yang berlainan.
  - Jika a > 0 dan D = 0, maka parabola akan terbuka ke atas dan menyinggung sumbu X di satu titik yang berimpit.
  - Jika a > 0 dan D < 0, maka parabola akan terbuka ke atas dan tidak memotong maupun menyinggung sumbu X
  - Jika a < 0 dan D > 0, maka parabola akan terbuka ke bawah dan memotong sumbu X di dua titik yang berlainan.
  - Jika a < 0 dan D = 0, maka parabola akan terbuka ke bawah dan menyinggung sumbu X di satu titik yang berimpit.
  - Jika a < 0 dan D < 0, maka parabola akan terbuka ke bawah dan tidak memotong maupun menyinggung sumbu X.

Bentuk-bentuk kurva parabola berdasarkan kombinasi nilai a dan D :



Keterangan:

Kurva 1.

a>0 dan D>0, maka kurva terbuka keatas, dan kurva tersebut akan memotong di dua titik sepanjang sumbu x Kurva ini juga memotong sumbu y.

Kurva 2.

a>0 dan D = 0, maka kurva terbuka keatas, dan kurva tersebut akan memotong disatu titik sepanjang sumbu yaitu tepat dititik puncaknya. Kurva ini juga memotong sumbu y.

Kurva 3.

a>0 dan D<0, maka kurva terbuka keatas, dan kurva tersebut tidak akan pernah memotong sumbu x, karena titik puncak dari kurva tersebut berada di atas sumbu x, jadi hanya memotong sumbu y.

Kurva 4.

a<0 dan D>0, maka kurva terbuka kebawah, dan kurva tersebut akan memotong di dua titik sepanjang sumbu x. Kurva ini juga memotong sumbu y.

Kurva 5.

a<0 dan D=0, maka kurva terbuka kebawah, dan kurva tersebut akan memotong disatu titik sepanjang sumbu x yaitu tepat dititik puncaknya. Kurva ini juga memotong sumbu y.
Kurva 6.

a<0 dan D<0, maka kurva terbuka kebawah, dan kurva tersebut tidak akan pernah memotong sumbu x, karena titik puncak dari kurva tersebut berada dibawah sumbu x, jadi hanya memotong sumbu y.

2. Persamaan kedua : $X = f(Y) = AY^2 + BY + C$

- Di mana: Y = Variabel bebas
  X = Variabel terikat
  a, b, dan c = konstanta, dan $a \neq 0$.

Apabila fungsi parabola berbentuk x = f(y), maka:

- Diskriminan => $\mathbf{D = B^2 - 4AC}$
- Titik puncak = $\left(\frac{-D}{4A}, \frac{-B}{2A} \right)$

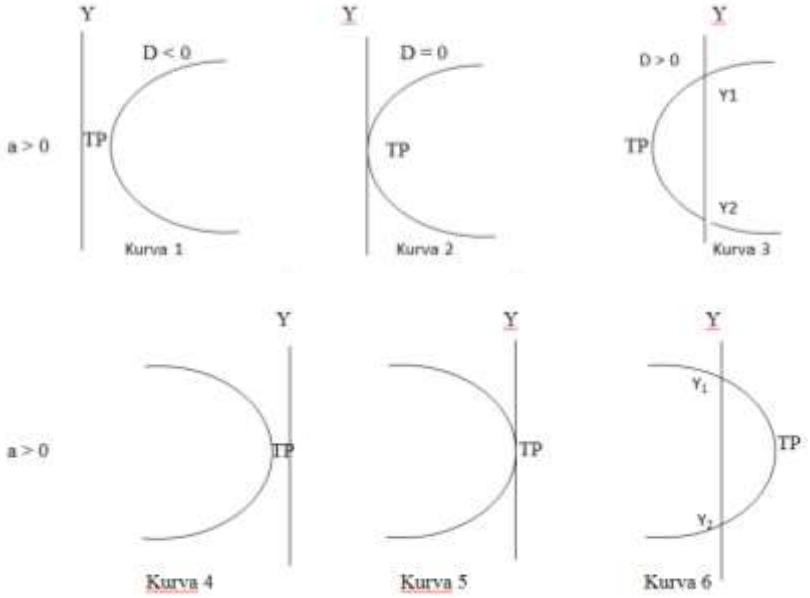
- Mencari koodinat titik potong pada sumbu X dan Y :
  Cari titik potong dengan sumbu x, maka y = 0
  Cari titik potong dengan sumbu y, maka x = 0 $\rightarrow AY^2 + BY + C = 0$
  Nilai-nilai penyelesaian untuk Y yang juga disebut akar-akar dari persamaan kuadrat dapat diperoleh dengan cara memfaktorkan atau dengan menggunakan rumus kuadrat :

$$Y_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

- Sumbu simetri kurva akan sejajar dengan sumbu x, jadi bentuk kurva dapat berbentuk terbuka ke kiri atau terbuka ke kanan.
  Persamaan sumbu simetris : $Y = \frac{-B}{2A}$

- Ada 6 bentuk kurva parabola dengan mengkombinasikan antara nilai konstanta "a" (dapat positif jika a > 0 dan dapat negative jika a < 0) dan nilai "D" (apakah nilai D < 0 , atau D = 0 atau D > 0).
  - Jika a > 0 maka kurva akan terbuka ke kanan.
  - Jika a < 0 maka bentuk kurva akan terbuka ke kiri.
  - Jika nilai D < 0 ini berarti kurva tersebut tidak akan pernah memotong sumbu y.
  - Jika nilai D = 0 ini berarti kurva tersebut memotong disatu titik sepanjang sumbu y, yaitu tepat dititik puncak kurva.
  - Jika nilai D > 0 ini berarti kurva tersebut akan memotong di dua titik sepnjang sumbu y.

Bentuk-bentuk kurva parabola berdasarkan kombinasi nilai a dan D :



Keterangan:

- Kurva 1

a>0 dan D<0, maka kurva terbuka ke kanan, dan kurva tersebut tidak akan pernah memotong sumbu y, karena titik puncak dari kurva tersebut berada di sebelah kanan sumbu y, jadi hanya memotong sumbu x.

- Kurva 2

a>0 dan D=0, maka kurva terbuka ke kanan, dan kurva tersebut akan memotong di satu titik sepanjang sumbu y, yaitu tepat di titik puncaknya. Kurva ini juga memotong sumbu x.

- Kurva 3

a>0 dan D>0, maka kurva terbuka kekanan, dan kurva tersebut akan memotong di dua titik sepanjang sumbu y. Kurva ini juga memotong sumbu x.

- Kurva 4

a<0 dan D<0, maka kurva terbuka ke kiri, dan kurva tersebut tidak akan pernah memotong sumbu y, karena titik puncak dari kurva tersebut berada di sebelah kiri sumbu y, jadi hanya memotong sumbu x.

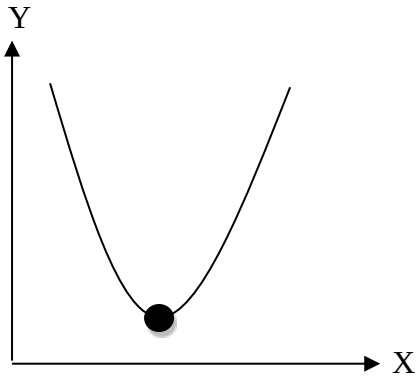
- Kurva 5

a<0 dan D=0, maka kurva terbuka ke kiri, dan kurva tersebut akan memotong di satu titik sepanjang sumbuy yaitu tepat dititik puncaknya. Kurva ini juga memotong sumbu x.

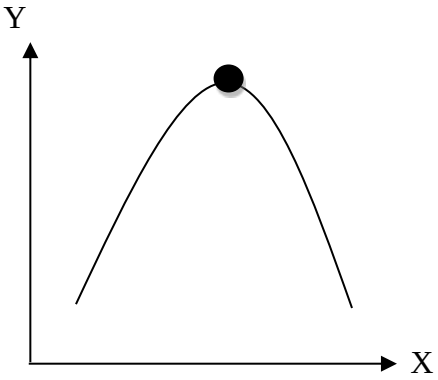
- Kurva 6

a<0 dan D>0, maka kurva terbuka ke kiri, dan kurva tersebut akan memotong di dua titik sepanjang sumbu y. Kurva ini juga memotong sumbu x.

II. Nilai Ekstrim (Maksimum dan Minimum)



(a) Terbuka ke atas



(b) Terbuka ke bawah

Suatu parabola mempunyai satu puncak. Titik puncak (vertex) adalah titik di mana arah perubahan fungsi dari menaik ke menurun atau dari menurun ke menarik. Dengan kata lain, titik puncak adalah titik yang paling bawah (dasar) dari parabola bilamana parabola terbuka ke atas atau titik yang paling atas dari parabola bilamana parabola terbuka ke bawah. Jadi, titik puncak ini dapat berupa titik minimum atau titik maksimum.

1. Koordinat titik puncak dari suatu parabola $Y = aX^2 + bX + c$ dapat diperoleh dengan rumus:

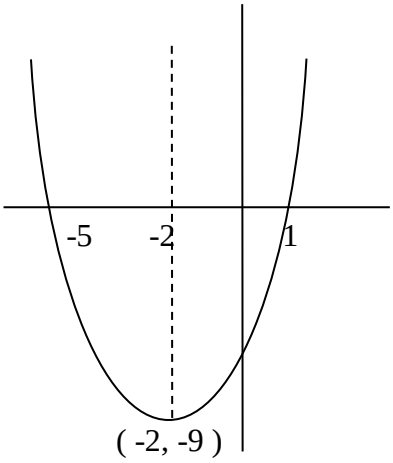
$$\text{Titik puncak} = \left\{\frac{-b}{2a}, \frac{-(b^2-4ac)}{4a}\right\}$$

Di mana: a, b, dan c adalah parameter atau konstanta dalam persamaan.

Suatu parabola vertikal mempunyai sebuah sumbu simetri yang sejajar dengan sumbu Y. **Sumbu simetri** adalah suatu garis lurus yang melalui titik puncak dan membagi parabola menjadi dua bagian yang sama bentuknya.

Contoh 1:

$Y = X^2 + 4X - 5$
$a > 0$
$D = 14 - (4.1.-5) = 36$ jadi $D > 0$
Titik puncak : $\frac{-4}{2}, \frac{-36}{4}$ = (-2, -9)
Titk potong dengan sumbu X → Y = 0
$X^2 + 4X - 5 = 0$
$(X + 5)(X-1) = 0$
$X = -5$, $X = 1$ (1,0)
Jadi titk potong dengan sumbu X adalah (-5,0) dan (1,0)



Contoh:

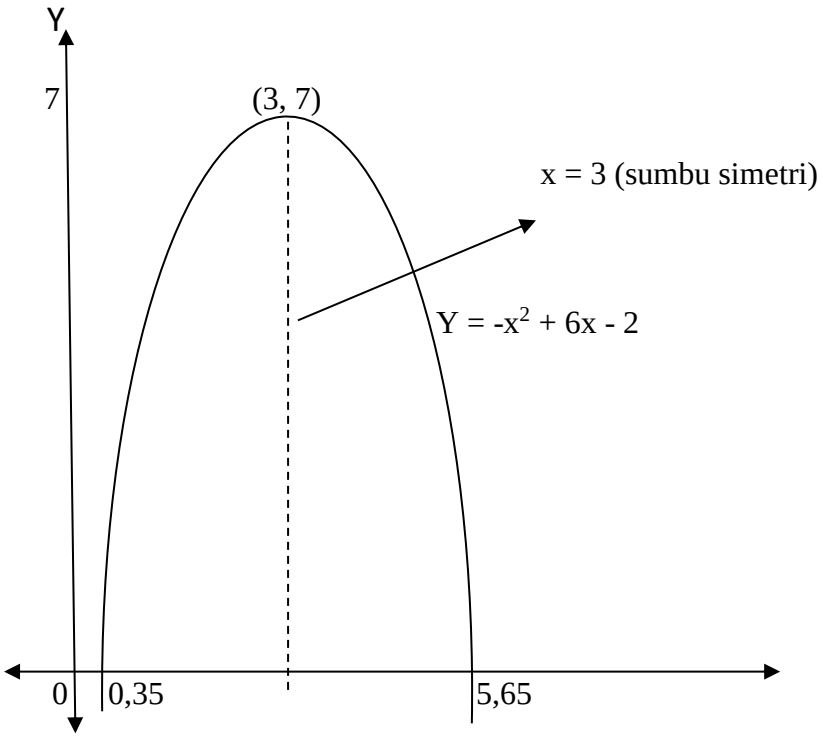
Tentukan titik ekstrim parabola $y = -x^2 + 6x - 2$ dan potongannya dengan sumbu-sumbu koordinat.

$y = -x^2 + 6x - 2$; parabola terbuka ke bawah karena $a = -1 < 0$, titik ekstrimnya terletak di atas, berupa titik puncak.

Koordinat titik puncak : $\left\{\frac{-b}{2a}, \frac{-(b^2-4ac)}{4a}\right\} = \left\{\frac{-6}{2(-1)}, \frac{-(6^2-4(-1)(-2)}{4(-1)}\right\} = (3, 7)$

Perpotongan dengan sumbu y : $x = 0 \rightarrow y = -2$

Perpotongan dengan sumbu x : $y = 0 \rightarrow -x^2 + 6x - 2 = 0$, diperoleh $x_1 = 5{,}65$; $x_2 = 0{,}35$



III. Rumus Kuadrat

Jika $Y = 0$ maka bentuk umum dari fungsi kuadrat $Y = aX^2 + bX + c$ akan menjadi persamaan kuadrat $aX^2 + bX + c = 0$. Nilai-nilai penyelesaian untuk X yang juga disebut akar-akar dari persamaan kuadrat dapat diperoleh dengan cara memfaktorkan atau dengan menggunakan rurmus kuadrat.

Rumus kuadrat ini adalah:

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Suku di dalam tanda akar, yaitu $b^2 - 4ac$ disebut diskriminan (D), nilai diskriminan ini akan menentukan apakah parabola vertikal memotong, menyinggung, atau tidak memotong maupun menyinggung sumbu X.

- Jika nilai $b^2 - 4ac$ adalah negative, maka tidak terdapat titik potong dengan sumbu X.
- jika nilai $b^2 - 4ac$ adalah sama dengan nol, maka terdapat satu titik potong dengan sumbu X.
- Jika nilai $b^2 - 4ac$ adalah positif, maka terdapat dua titik potong dengan sumbu X. Jadi, rumus kuadrat ini hanya digunakan bila nilai $b^2 - 4ac$ positif atau sama dengan nol.

Contoh:

Jika fungsi kuadrat $Y = X^2 - 8X + 12$, carilah koordinat titik puncak dan gambarlah parabolanya?

Penyelesaian:

Koordinat titik puncak = $\left\{\frac{-b}{2a}, \frac{-(b^2-4ac)}{4a}\right\}$

$= \left\{\frac{-8}{2}, \frac{-(64-48)}{4}\right\} = (4, -4)$

Kurva parabola terbuka kebawah karena a = -1< 0

Untuk X = 0, maka Y = 12

Titik potong sumbu Y adalah (0,12)

Untuk Y = 0, maka $X^2 - 8X + 12 = 0$

$X_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2}$

$X_1 = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2}$

$X_1 = \frac{8+4}{2} = 6$

$X_1 = \frac{8 - 4}{2} = 2$, titik potong sumbu X adalah (2,0) dan (6,0)

Contoh :

Tentukan titik ekstrim parabola $y = -x^2 + 8x - 4$ dan perpotongannya dengan sumbu-sumbu koordinat.

Penyelesaian:

Diketahui :

$y = -x^2 + 8x - 4 \quad \rightarrow \quad a = -1, b = 8, c = -4$

Kurva parabola terbuka kebawah karena a = -1< 0

- Titik potong
  - Titik potong pada sumbu y (x=0)

    $F(0) = -1(0)^2 + 8(0) - 4$

    $= 0 - 0 - 4$

    $= -4$

    (0, -4)
  - Titik potong pada sumbu x (y=0)

    $-x^2 + 8x - 4 = 0$

    $(-x + 7, 48)\ (x - 0, 52)$

    $-X_1 = -1, \quad X_2 = 0, 52$

    $X_1 = 7, 48$

    (7, 48; 0) (0, 52; 0)
- Titik Ekstrim

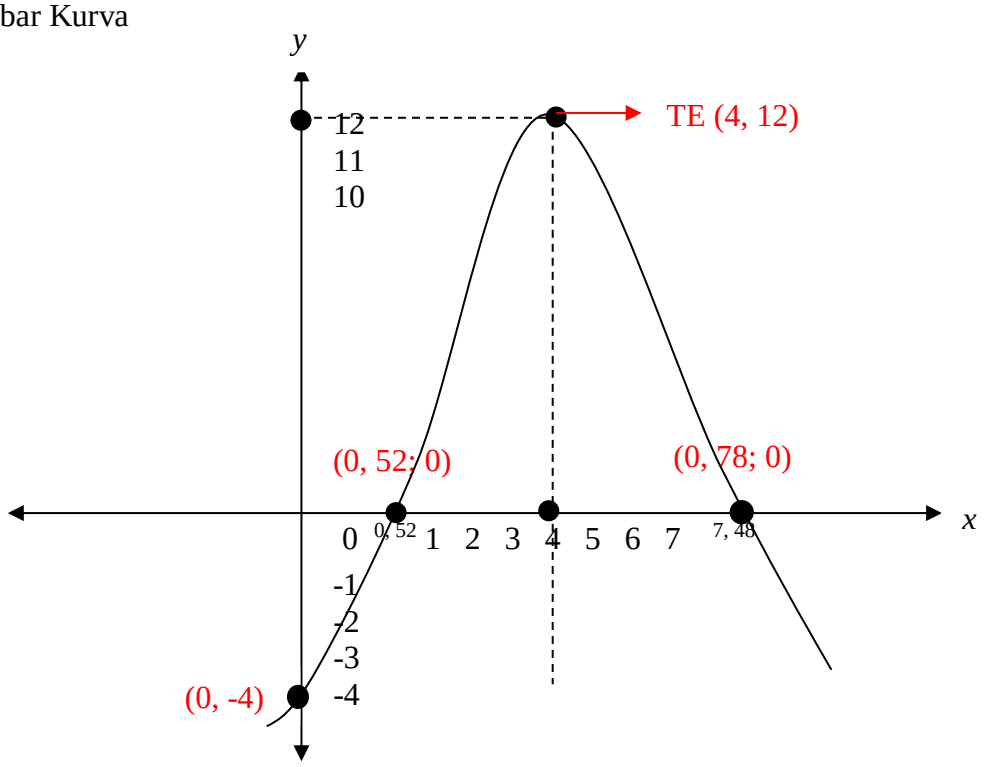
  TE = $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{b^2-4ac}{-4a}\right)$

  = $\left(\frac{-8}{2.-1}, \frac{(8)^2-4.-1.-4}{-4.-1}\right)$

  = $\left(\frac{-8}{-2}, \frac{64-16}{4}\right)$

  = (4, 12)

  Gambar Kurva



IV. Titik Potong Dua Grafik (Kurva)

Jika kita menggambarkan dua grafik yang berbeda dalam satu koordinat kartesius yang sama, maka kita dapat melihat apakah kedua grafik tersebut "berjodoh" atau "tidak". Kalau dua grafik tersebut berjodoh, mereka akan saling dipertemukan sama lain di suatu titik yang dinamakan titik potong.

Contoh Soal:

1. Tentukan titik potong dari persamaan y = -x + 3 dengan $y=x^2 + 2$, kemudian gambarkan grafiknya dalam koordinat yang sama.

Jawab:

Misalkan $y_1 = -x + 3$ dan $y_2 = x^2 + 2$. Titik potong terjadi ketika

$$Y_1 = Y_2$$

$$-x + 3 = x^2 + 2$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

Nilai x yang memenuhi persamaan tersebut. Dengan menggunakan rumus abc:

$X_1 = \frac{-1+\sqrt{1^2-4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ dan $X_2 = \frac{-1-\sqrt{1^2-4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

Kemudian kita substitusikan nilai x_1 dan x_2 ke dalam persamaan y_1 (ke dalam y_2 juga boleh, karena hasilnya akan sama).

Untuk $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ berkorespondensi dengan $Y = -\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) + 3 = \frac{7-\sqrt{5}}{2}$, Jadi titik potongnya $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{7-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Untuk $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ berkorespondensi dengan $Y = -\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) + 3 = \frac{7+\sqrt{5}}{2}$Jadi titik potong lainnya $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{7+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Dapat disimpulkan bahwa kita punya dua titik potong, yakni $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{7-\sqrt{5}}{2}\right)$ dan $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{7+\sqrt{5}}{2}\right)$.

BAB V
APLIKASI FUNGSI KUADRAT DALAM EKONOMI

1. Fungsi Permintaan, Fungsi Penawaran, dan Keseimbangan Pasar

Selain berbentuk fungsi linier, permintaan dan penawaran dapat pula berbentuk fungsi non-linear. Fungsi permintaan dan fungsi penawaran yang kuadratik dapat berupa potongan lingkaran, potongan elips, potongan hiperbola maupun potongan parabola.

A. Fungsi Permintaan (Demand)

Besar kecilnya jumlah barang yang diminta sangat tergantung padaa tingkat harga barang tersebut. Apabila keadaan lainnya tetap (Ceteris paribus), maka:

1. Pada tingkat pendapatan yang tetap, jika harga barang/price (P) naik, maka jumlah barang/quantity (Q) yang diminta berkurang. Sebaiknya jika harga barang (P) turun, maka jumlah barang yang diminta (Q) naik (Hukum permintaan).
2. Slope/gradient negatif.
3. Variabel P dan Q selalu positif atau $P \geq 0$ dan $Q \leq 0$
4. Kurva bergerak dari kiri atas ke kanan bawah.
5. Titik pada kurva permintaan menunjukkan pada satu tingkat P hanya ada satu nilai Q dan sebaliknya.
6. Bentuk umum fungsi permintaan:

   Pd = f(Q) = aQ2 + bQ + c atau **Qd = f(P) = AQ2 + BQ + C**

B. Fungsi Penawaran (Supply)

Besar kecilnya jumlah barang yang ditawarkan sangat tergantung dari tingkat harga barang tersebut. Apabila keadaan lainnya tetap (ceteris paribus) maka:

1. Semakin tinggi harga, semakin banyak jumlah barang yang bersedia ditawarkan. Sebaliknya, semakin rendah tingkat harga, semakin sedikit jumlah barang yang bersedia ditawarkan (Hukum Penawaran).
2. Slope/gradient selalu positif.
3. Variabel P dan Q selalu positif
4. Kurva bergerak dari kiri bawah ke kanan atas
5. Titik pada kurva penawaran menunjukkan bahwa pada satu tingkat P hanya ada satu nilai Q dan sebaliknya.
6. Bentuk umum fungsi penawaran:

   Ps = f(Q) = aQ^2 + bQ + c atau **Qs = f(P) = AQ^2 + BQ + C**

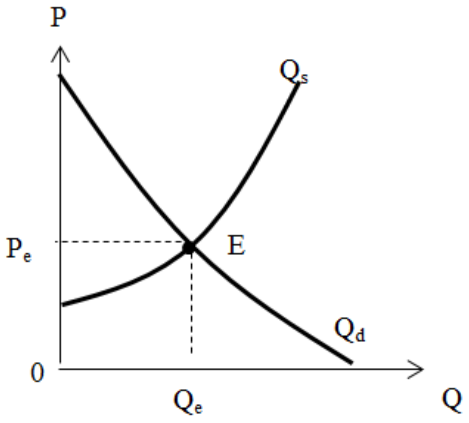
C. Keseimbangan Pasar (Market Equilibrium)

Cara menganalisis keseimbangan pasar untuk permintaan dan penawaran yang non-linier sama seperti halnya dengan permintaan dan penawaran linier. **Keseimbangan pasar** (Equilibrium): kondisi dimana jumlah barang yang diminta di pasar sama dengan jumlah barang yang ditawarakan, dan atau harga barang yang diminta sama dengan harga yang ditawarkan. **Titik keseimbangan pasar** ditentukan sebagai titik potong antara kurva permintaan dengan kurva penawaran dan hanya berlaku untuk titik yang memenuhi ketentuan ciri-ciri dari kedua kurva tersebut. **Harga pasar** adalah harga yang terjadi pada titik keseimbangan pasar yaitu titik pertemuan antara fungsi permintaan dan penawaran.
Secara matematik dan grafik hal ini ditunjukkan oleh kesamaan Qd = Qs atau Pd = Ps, yakni pada perpotongan kurva permintaan dengan kurva penawaran sebagai berikut :

$Q_d = Q_s$ atau $P_d = P_s$

Keterangan :

Q_d = Fungsi permintaan
Q_s = Fungsi penawaran
E = Titik keseimbangan
P_e = Harga keseimbangan
Q_e = Jumlah keseimbangan



Contoh Soal :

Diketahui fungsi permintaan Pd = Q^2 – 15Q +36, dan fungsi penawaran Ps = Q^2 + 5Q + 6. Tentukan jumlah keseimbangan dan harga keseimbangan serta gambarkan grafiknya ?!

Jawab :
Diketahui : Pd = Q^2 – 15Q +36
Ps = Q^2 + 5Q + 6

Keseimbangan Pasar : Pd = Ps

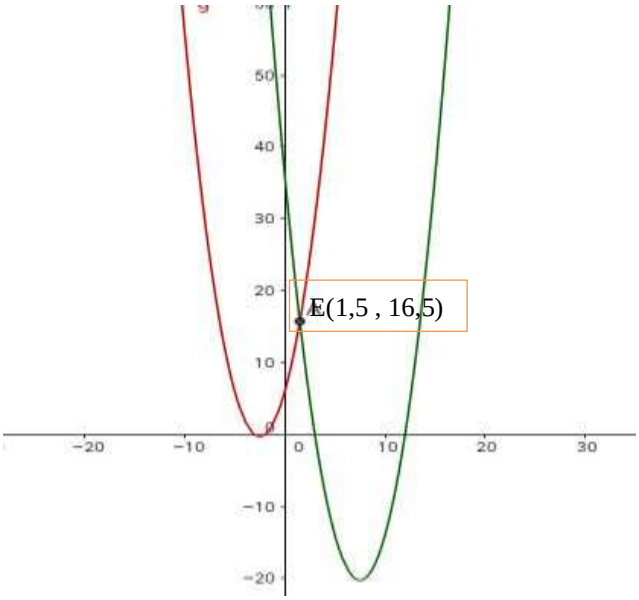
$Q^2 - 15Q + 36 = Q^2 + 5Q + 6$
$36 - 6 = 15Q + 5Q$
$30 = 20Q$
$\frac{30}{20} = Q$
$1{,}5 = Qe$

P = Q^2 – 15Q +36
= $(1{,}5)^2 - 15\,(1{,}5) + 36$
= $3 - 22{,}5 + 36$
$P_e = 16{,}5$

Jadi, keseimbangan pasar terjadi pada $Q_e = 1{,}5$ dan $P_e = 16{,}5 \rightarrow E\ (1{,}5\ ,\ 16{,}5)$

- Titik potong $Pd = Q^2 - 15Q + 36$ pada sumbu X dan Y:
  - Titik potong pada sumbu Q (P=0)
    $0 = Q^2 - 15Q + 36$
    $(Q - 3)(Q - 12)$
    $Q_1 = 3 \quad , \quad Q_2 = 12$
    Jadi, titik potong pada sumbu Q adalah (3,0) dan (12,0)
  - Titik potong pada sumbu P (Q = 0)
    $Pd = Q^2 - 15Q + 36$
    $P = (0)^2 - 15(0) + 36$
    $P = 36$
    Jadi, titik potong pada sumbu P adalah (36,0)
- Titik potong $Ps = Q^2 + 5Q + 6$ pada sumbu X dan Y :
  - Titik potong pada sumbu Q (P=0)
    $0 = Q^2 + 5Q + 6$
    $(Q + 2)(Q + 3)$
    $Q_1 = -2 \quad , \quad Q_2 = -3$
    Jadi, titik potong pada sumbu Q adalah (-2,0) dan (-3,0)
  - Titik potong pada sumbu P (Q=0)
    $Ps = Q^2 + 5Q + 6$
    $P = (0)^2 - 5(0) + 6 = 6$
    Jadi, titik potong pada sumbu P adalah (6,0)

Gambar grafik



2. Diketahui : Qd = 19-p^2 (fungsi permintaan)
   Qs = -8+$2p^2$ (fungsi penawaran)

Ditanya : Jumlah dan harga keseimbangan

Jawab :

Formula Keseimbangan :**E = Qd = Qs atau Pd = Ps**

$$19-p^2 = -8+2p^2$$
$$19+8 = 2p^2+p^2$$
$$27 = 3p^2$$
$$9 = p^2$$
$$\sqrt{9} = p \rightarrow p = \pm \mathbf{3}$$

Pe = 3 disubstitusikan ke salah satu persamaan yang penyelesaiannya paling mudah:

$\rightarrow$ Qd = 16 - 3^2

= 16 - 9 = 7

$\therefore$ Jadi keseimbangan pasar tercipta pada Pe = Rp 3 dan Qe = 7 unit barang.

2. Diketahui fungsi Pd = Q^2 – 10 Q + 24
Ps = Q^2 + 7 Q + 10

Jawaban :

Keseimbangan pasar : Pd = Ps

$$Q^2 – 10\,Q + 24 = Q^2 + 7\,Q + 10$$
$$Q^2 – Q^2 – 10\,Q - 7\,Q = 10 -24$$
$$-17\,Q = -14$$
$$Q = \frac{-14}{-17}$$
$$Q = 0{,}82$$

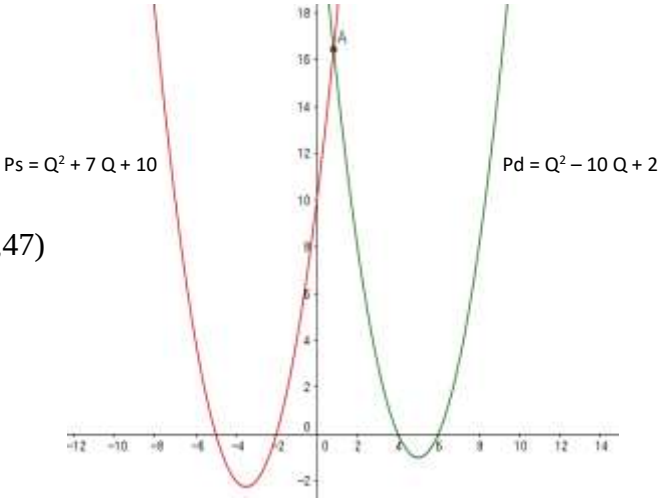
Pd = Q^2 – 10 Q + 24

= $(0{,}82)^2$ – 10 (0,82) + 24

= 0,67 – 8,2 + 24

= 16,47

$\therefore$ Jadi keseimbangan pasar A (0,82 , 16,47)



Pd = Q^2 – 10 Q + 24

Q = 0 $\rightarrow$ P = 24

P = 0 $\rightarrow$ 0 = Q^2 – 10 + 24

= (Q – 6) (Q – 4)

Q_1 = 6 , Q_2 = 4

Jadi, titik potong pada sumbu Q adalah (2,0) dan (-3,0)

Ps = Q^2 + 7 Q + 10

Q = 0 $\rightarrow$ P = 10

P = 0 $\rightarrow$ 0 = Q^2 + 7 Q + 10

= (Q + 5) (Q + 2)

Q_1 = -5 , Q_2 = -2

Jadi, titik potong pada sumbu Q adalah (-2,0) dan (-3,0)

II. Efek Pajak terhadap Keseimbangan Pasar

Efek Pajak terhadap keseimbangan pasar tercermin oleh berubahnya persamaan penawaran, sehingga harga keseimbangan dan jumlah keseimbangan yang tercipta di pasarpun berubah. Pajak menyebabkan harga keseimbangan menjadi lebih tinggi dan jumlah keseimbangan menjadi lebih sedikit.

Jika produk dikenakan pajak **t** per unit, maka akan terjadi perubahan keseimbangan pasar atas produk tersebut, baik harga maupun jumlah keseimbangan. Biasanya tanggungan pajak sebagian dikenakan kepada konsumen sehingga harga produk akan naik dan jumlah barang yang diminta akan berkurang.

Penetapan pajak dibedakan 2 yaitu

1) Pajak spesifik, yatiu pajak yang ditetapkan atas setiap unit (per unit) barang yang dijual
2) Pajak proporsional yaitu pajak yang ditetapkan berdasarkan persentase tertentu dari harga jual.

Efek Pajak spesifik terhadap Keseimbangan Pasar

Pengenaan pajak sebesar **t** atas setiap unit barang yang dijual menyebabkan perubahan pada persamaan fungsi penawaran (fungsi permintaan tetap/tidak berubah) dan kurva penawaran bergeser ke atas sejajar dengan lereng yang tetap dan penggal yang lebih besar pada sumbu harga.

Perubahan Fungsi Penawaran Akibat Pajak Spesifik

Model Persamaan	Fungsi Penawaran		Fungsi Permintaan
	Sebelum pajak	Sesudah pajak	
$P_s = f(Q)$	$P_s = aQ^2 + bQ + c$	$P_s' = aQ^2 + bQ + c + t$	$P_d = aQ^2 + bQ + c$
$Q_s = f(P)$	$Q_s = AP^2 + BP + C$	$Q_s' = A(P - t)^2 + B(P - t) + C$	$Q_d = AP^2 + BP + C$

Efek Pajak Proporsional terhadap Keseimbangan Pasar

Pengenaan pajak proporsional sebesar t % atas setiap unit barang yang dijual menyebabkan perubahan pada persamaan fungsi penawaran (fungsi permintaan tetap/tidak berubah) dan kurva penawaran akan bergerak ke atas, dengan membentuk sudut/lereng yang lebih besar daripada kurva penawaran sebelum pajak.

- Perubahan Fungsi Penawaran Akibat Pajak Proporsional

Model Persamaan	**Fungsi Penawaran**		**Fungsi Permintaan**
	Sebelum pajak	Sesudah pajak	
Ps = f(Q)	**$Ps = aQ^2 + bQ + c$**	**$Ps' = aQ^2 + bQ + c + t.Ps$** **$= Ps + t.Ps$** **$= (1 + t)\ Ps$** **$= (1 + t)(\ aQ^2 + bQ + c)$**	**Pd = aQ2 + bQ + c**
Qs = f(P)	**$Qs = AP^2 + BP + C$**	**$Qs = A(\frac{P}{1+t})^2 + B(\frac{P}{1+t}) + C$**	**$Qd = AP^2 + BP + C$**

Keseimbangan pasar sebelum dan sesudah pajak

Keseimbangan pasar	
Sebelum Pajak	Sesudah Pajak
Ps = Pd	Ps' = Pd
Qs = Pd	Qs' = Pd

Pajak yang ditanggung Konsumen dan Produsen akibat efek Pajak Spesifik dan Proposional :

Keterangan	**Pajak Spesifik**		**Pajak Proporsional**	
	Per unit	**T o t a l**	**Per unit**	**T o t a l**
Pajak ditanggung konsumen	tk = Pe'– Pe	TK = tk x Qe'	tk = Pe' – Pe	TK = tk x Qe'
Pajak ditanggung produsen	tp = t – tk	TP = tp x Qe'	tp = t' – tk	TP = tp x Qe'
Pajak diterima pemerintah	t	T = t x Qe'	t' = t x Pe'	T = t x Qe'

III. Efek Subsidi terhadap Keseimbangan Pasar

Jika produk dikenakan subsidi s per unit, maka akan terjadi perubahan keseimbangan pasar atas produk tersebut, baik harga maupun jumlah keseimbangan. Biasanya subsidi yang diberikan pemerintah kepada produsen sebagian dialihkan kepada konsumen sehingga harga produk akan turun /lebih murah dan jumlah barang yang diminta akan bertambah.

Penetapan subsidi dibedakan 2 yaitu

1) Subsidi spesifik, yatiu subsidi yang diberikan atas setiap unit (per unit) barang yang dijual
2) Subsidi proporsional yaitu subsidi yang dibetapkan berdasarkan persentase tertentu dari harga jual

1. Efek Subsidi Spesifik terhadap Keseimbangan Pasar

Pengenaan subsidi sebesar s atas setiap unit barang yang dijual menyebabkan perubahan pada persamaan fungsi penawaran (fungsi permintaan tetap/tidak berubah) dan kurva penawaran bergeser sejajar ke bawah, dengan lereng yang tetap dan penggal yang lebih kecil pada sumbu harga.

Perubahan Fungsi Penawaran Akibat Subsidi Spesifik

Model Persamaan	Fungsi Penawaran		Fungsi Permintaan
	Sebelum Subsidi	Sesudah Subsidi	
Ps = f(Q)	**$Ps = aQ^2 + bQ + c$**	**$Ps' = aQ^2 + bQ + c - s$**	**$Pd = aQ^2 + bQ + c$**
Qs = f(P)	**$Qs = AP^2 + BP + C$**	**$Qs' = A(P + s)^2 + B(P + s) + C$**	**$Qd = AP^2 + BP + C$**

2. Efek Subsidi Proposional terhadap Keseimbangan Pasar

Penetapan subsidi sebesar s % atas setiap unit barang yang dijual menyebabkan perubahan pada persamaan fungsi penawaran (fungsi permintaan tetap/tidak berubah) dan kurva penawaran bergerak ke bawah, dengan membentuk sudut/lereng yang lebih kecil daripada kurva penawaran sebelum pajak.

Perubahan Fungsi Penawaran Akibat Subsidi Proporsional

Model Persamaan	Fungsi Penawaran		Fungsi Permintaan
	Sebelum Subsidi	Sesudah Subsidi	
Ps = f(Q)	**$Ps = aQ^2 + bQ + c$**	**$Ps' = aQ^2 + bQ + c + s.Ps'$** **$= (1 - s)(aQ^2 + bQ + c)$** **$= (1 - s)\,Ps$**	**Pd = aQ2 + bQ + c**
Qs = f(P)	**$Qs = AP^2 + BP + C$**	**$Qs = A(\frac{P}{1-s})^2 + B(\frac{P}{1-s}) + C$**	**$Qd = AP^2 + BP + C$**

Subsidi yang ditanggung Konsumen dan Produsen akibat efek Subsidi Spesifik dan Proposional :

Keterangan	Subsidi Spesifik		Subsidi Proporsional	
	Per unit	T o t a l	Per unit	T o t a l
Subsidi diterima konsumen	sk = Pe– Pe'	SK = sk x Qe'	sk = Pe – Pe'	SK = sk x Qe'
Subsidi diterima produsen	sp = s – sk	SP = sp x Qe'	sp = s' – sk	SP = sp x Qe'
Subsidi dibayar pemerintah	s	S = s x Qe'	s' = s x Pe'	S = s x Qe'

Contoh soal :

Persamaan permintaan adalah $Qd = 16 – P^2$ dan persamaan penawaran $Qs = -8 + 2P^2$.

Ditanya :

a. pada tingkat harga dan jumlah berapakah keseimbangan pasar terjadi?

b. Jika ditetapkan pajak sebesar Rp.2, buatlah persamaan keseimbangan yang baru serta tentukan berapa harga dan jumlah keseimbangan setelah pajak!
c. Jika ditetapkan subsidi sebesar Rp.2, buatlah persamaan keseimbangan yang baru serta tentukan berapa harga dan jumlah keseimbangan setelah subsidi!

Jawab :

a. Diketahui : $Qd = 16 - P^2$ dan $Qs = -8 + 2P^2$

Ditanya : Pe ….? dan Qe ….?

Kesimbangan pasar :

$Qd = Qs$

$16 - P^2 = -8 + 2P^2$

$-3P^2 = -24$

$P^2 = 24 / 3$

$P^2 = 8$

Pe = 2,83

Substitusikan Pe= 2,83 ke salah satu Persamaan:

$Qd = 16 - P^2$

$Qd = 16 - (2,83)^2$

$Qd = 16 - 8,01$

Qe = 7,99

Jadi harga keseimbangan : Pe = 2,83 dan jumlah keseimbangan pasar : Qe = 7,99

b. Jika pemerintah menetapkan **pajak** spesfik Rrp 2/unit barang

Fungsi Penawaran setelah pajak :

$Qs = -8 + 2P^2$

$Qs = -8 + 2(P - 2)^2$

$Qs = -8 + 2(P^2 - 4P + 4)$

$Qs = -8 + 2P^2 - 8P + 8$

$Qs' = 2P^2 - 8P$

Formula keseimbangan :

$Qd = Qs'$

$16 - P^2 = 2P^2 - 8P$

$2P^2 + P^2 - 8P - 16 = 0$

$3P^2 - 8P - 16 = 0$

Diperoleh : a = 3, b = -8 dan c = -16

Dicari dengan rumus abc :

$$P1,2 = \frac{-b \pm \sqrt{b2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)2 - 4(3)(-16)}}{2.3}$$

$$= \frac{(8 \pm \sqrt{64 + 192})}{6}$$

$$= \frac{(8 \pm \sqrt{256})}{6}$$

$$P1 = \frac{(8 + 16)}{6} = 4$$

$$P2 = \frac{(8 - 16)}{6} = -1,33 \text{ (tidak terpakai)}$$

Substitusi Pe' = 4 ke salah satu persamaan :

$Qd = 16 - P^2$

$= 16 - (4)^2$

$= 16 - 16$

$Qe' = 0$

Jadi, harga keseimbangan setelah dipengaruhi pajak berubah dari Rp. 2,83 menjadi Rp. 4 dan jumlah keseimbangan berubah dari 7,99 unit menjadi 0 unit.
Ini membuktikan teori pengaruh pajak terhadap keseimbangan pasar yang membuat harga keseimbangan naik sehingga mengakibatkan tingkat permintaan pasar menurun.

Pajak yang ditanggung Konsumen dan Produsen Efek Pajak Spesifik :

Beban pajak per unit yang ditanggung oleh konsumen : $tk = Pe' - Pe = 4 - 2.83 = 1,17$

Beban pajak total yang ditanggung oleh konsumen : $TK = tk \times Qe' = 1,17 \times 0 = 0$

Beban pajak per unit yang ditanggung oleh produsen : $tp = t - tk = 2 - 1,17 = 0,83$

Beban pajak total yang ditanggung oleh produsen : $TP = tp \times Qe' = 0,83 \times 0 = 0$

Jumlah pajak total yang diterima oleh pemerintah : $T = t \times Qe' = 2 \times 0 = 0$

c. Jika pemerintah menetapkan **subsidi** spesfik Rrp 2/unit barang

Persamaan Penawaran setelah subsidi :

$Qs = -8 + 2P^2$

$Qs = -8 + 2(P + 2)^2$

$Qs = -8 + 2(P^2 + 4P + 4)$

$Qs = -8 + 2P^2 + 8P + 8$

$Qs' = 2P2 + 8P$

Formula keseimbangan :

$Qd = Qs'$

$16 - P^2 = 2P^2 + 8P$

$2P^2 + P^2 + 8P - 16 = 0$

$3P^2 + 8P - 16 = 0$

Diperoleh a = 3, b = 8 dan c = -16

Dicari dengan rumus abc

$$P1,2 = \frac{-b \pm \sqrt{b2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-8 \pm \sqrt{82 - 4(3)(-16)}}{2(3)}$$

$$= \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 192}}{6}$$

$$= \frac{-8 \pm \sqrt{256}}{6}$$

$$P1 = \frac{-8 + 16}{6} = 1,33$$

$$P2 = \frac{-8 - 16}{6} = -4 \text{ (tidak terpakai)}$$

Substitusi Pe' = 1,33 ke salah satu persamaan :

$Qd = 16 - P^2$

$Qd = 16 - (1{,}33)^2$

$Qd = 16 - 1{,}77$

$Qe' = 14{,}23$

Jadi, harga keseimbangan setelah dipengaruhi subsidi berubah dari Rp. 2,83 menjadi Rp. 1,33 dan jumlah keseimbangan berubah dari 7,99 unit menjadi 14,33 unit. Ini membuktikan teori pengaruh subsidi terhadap keseimbangan pasar yang menurunkan harga keseimbangan sehingga membuat tingkat permintaan pasar meningkat.

Subsidi yang diteima Konsumen dan Produsen Efek Subsidi Spesifik :

Subsidi per unik yang dinikmati oleh konsumen : $sk = Pe - Pe' = 2{,}83 - 1{,}33 = 1{,}50$

Subsidi total yang dinikmati oleh konsumen : $SK = sk \times Qe' = 1{,}50 \times 14{,}23 = 21{,}345$

Subsidi per unit yang x dinikmati oleh produsen : $sp = s - sk = 2 - 1{,}50 = 0.5$

Subsidi total yang dinikmati oleh produsen : $SP = sp \times Qe' = 0.5 \times 14{,}23 = 7, 12$

Jumlah subsidi yang dibayarkan oleh pemerintah : $S = s \times Qe' = 2 \times 14{,}23 = 28, 465$

IV. Fungsi Biaya

Fungsi biaya merupakan hubungan antara biaya dengan jumlah produksi yang dihasilkan. Biaya total terdiri dari biaya tetap dan biaya variable. Selain pengertian biaya total, biaya tetap dan biaya variable tesebut dalam konsep biaya dikenal pula pengertian biaya rata-rata (average cost) dan biaya marjinal (marginal cost).

Biaya rata-rata ialah biaya yang dikeluarkan untuk menghasilkan tiap unit produk atau keluaran, merupakan hasil bagi biaya total terhadap jumlah keluaran yang dihasilkan. Adapun **biaya marjinal** ialah biaya tambahan yang dikeluarkan untuk menghasilkan satu unit tambahan produk.

Biaya tetap	: $FC = k$ (k: konstanta)
Biaya variabel	: $VC = J(Q)$
Biaya total	: $C = FC + VC = k + f(Q) = c(Q)$
Biaya tetap rata-rata	: $AFC = \frac{FC}{Q}$
Biaya variabel rata-rata	: $AVC = \frac{VC}{Q}$
Biaya rata-rata	: $AC = \frac{C}{Q} = AFC + AVC$
Biaya marjinal	: $MC = \frac{\Delta C}{\Delta Q}$

Keterangan :

Biaya Total (Total Cost = TC = C)

Biaya Variabel (Variable Cost = VC)

Biaya Tetap (Fixed Cost = FC)

Biaya Total Rata-Rata (Average Total Cost = AC)

Biaya Variabel Rata Rata (Average Variable Cost = AVC)

Biaya Tetap Rata-Rata (Average Fixed Cost = AFC)

Biaya Marginal (MC)

Bentuk non linier dari fungsi biaya pada umumnya berupa fungsi kubik dan fungsi kuadrat parabolik.

a. Biaya total merupakan **Fungsi Kuadrat Parabolik**.

Andaikan $C = aQ^2 – bQ + c$ maka $VC = aQ^2 – bQ$ dan $FC = c$

$$AC = \frac{C}{Q} = a\,Q - b + \frac{c}{Q}$$

$$AVC = \frac{VC}{Q} = a\,Q - b$$

$$AFC = \frac{FC}{Q} = \frac{c}{Q}$$

b. Biaya total merupakan **Fungsi Kubik**

Andaikan $C = aQ^3 – bQ^2 + cQ + d$ maka $VC = aQ^3 – bQ^2 + cQ$ dan $FC = d$.

$$AC = \frac{C}{Q} = aQ^2 - bQ + c + \frac{d}{Q}$$

$$AVC = \frac{VC}{Q} = a\,Q^2 - b\,Q + c$$

$$AFC = \frac{FC}{Q} = \frac{d}{Q}$$

Contoh 1:

1. Biaya total yang dikeluarkan oleh sebuah perusahaan ditunjukkan oleh persamaan

$C = 2Q^2 – 24\,Q + 102$.

a. Pada tingkat produksi berapa unit biaya total ini minimum? Hitunglah besarnya biaya total minimum tersebut.

b. Hitung pula besarnya biaya tetap, biaya variable, biaya rata-rata, biaya tetap rata-rata dan biaya variable rata-rata pada tingkat produksi tadi.

c. Seandainya dari kedudukan ini produksi dinaikkan dengan 1 unit, berapa besarnya biaya marjinal?

Jawab :

a. Berdasarkan rumus titik ekstrim parabola, C minimum terjadi pada kedudukan :

$$Q = \frac{-b}{2a} = \frac{24}{4} = 6 \text{ unit}$$

Besarnya C minimum = 2Q2 – 24 Q + 102

= 2(6)2 – 24(6) + 102 = 30

C minimum dapat juga dicari dengan rumus ordinat titik ekstrim parabola, yaitu :

$$Cmin = \frac{b^2 - 4ac}{-4a} = \frac{24^2 - 4(2)(102)}{-4(2)} = \frac{-240}{-8} = 30$$

b. Selanjutnya, pada Q = 6

$$FC = 102$$

$$VC = 2Q^2 - 24\,Q = 2(6)^2 - 24(6) = -72$$

$$AC = \frac{C}{Q} = \frac{30}{6} = 5$$

$$AVC = \frac{VC}{Q} = \frac{-72}{6} = -12$$

$$AFC = \frac{FC}{Q} = \frac{102}{6} = 17$$

d. Jika Q = 7, C = $2(7)^2 – 24(7) + 102 = 32$

$$MC = \frac{\Delta C}{\Delta Q} = \frac{32 - 30}{7 - 6} = 2$$

Berarti untuk menaikkan produksi dari 6 unit menjadi 7 unit diperlukan biaya tambahan (biaya marjinal) sebesar 2.

V. Fungsi Penerimaan

- Bentuk fungsi penerimaan total (total revenue, **R**) yang non linear pada umumnya berupa sebuah persamaan parabola terbuka ke bawah.
- **Penerimaan total** merupakan fungsi dari jumlah barang, juga merupakan hasilkali jumlah barang dengan harga barang per unit. Seperti halnya dalam konsep biaya, dalam konsep penerimaanpun dikenal pengertian rata-rata dan marjinal.

- **Penerimaan rata-rata** (average revenue, **AR**) ialah penerimaan yang diperoleh per unit barang, merupakan hasilbagi penerimaan total terhadap jumlah barang.
- **Penerimaan marjinal** (marginal revenue, **MR**) ialah penerimaan tambahan yang diperoleh dari setiap tambahan satu unit barang yang dihasilkan atau terjual.

Penerimaan total : $R = Q \times P = f(Q)$

Penerimaan rata-rata : $AR = \frac{R}{Q}$

Penerimaan marjinal : $MR = \frac{\Delta R}{\Delta Q}$

Contoh Soal :
Fungsi permintaan yang dihadapi oleh seorang produsen monopolis ditunjukkan oleh $P = 900 - 1{,}5\,Q$.

a. Bagaimana persamaan penerimaan totalnya?
b. Berapa besarnya penerimaan total jika terjual barang sebanyak 200 unit, dan berapa harga jual per unit ?
c. Hitunglah penerimaan marjinal dari penjualan sebanyak 200 unit menjadi 250 unit ! .
d. Tentukan tingkat penjualan yang menghasilkan penerimaan total maksimum, dan besarnya penerimaan maksimum tersebut.

Jawab :

a. Fungsi permintaan : $P = 900 - 1{,}5\,Q$

   Fungsi penerimaan total : $R = Q \times P = 900\,Q - 1{,}5\,Q^2$

b. Jika $Q = 200 \rightarrow R = 900\,(200) - 1{,}5(200)^2 = 120.000$

   Harga : $P = 900 - 1{,}5\,(200) = 600$

   Atau : $P = \frac{R}{Q} = \frac{120.000}{200} = 60$

c. Jika $Q = 250 \rightarrow R = 900\,(250) - 1{,}5(250)^2 = 131.250$

   $$MR = \frac{\Delta R}{\Delta Q} = \frac{131.250 - 120.000}{250 - 200} = 225$$

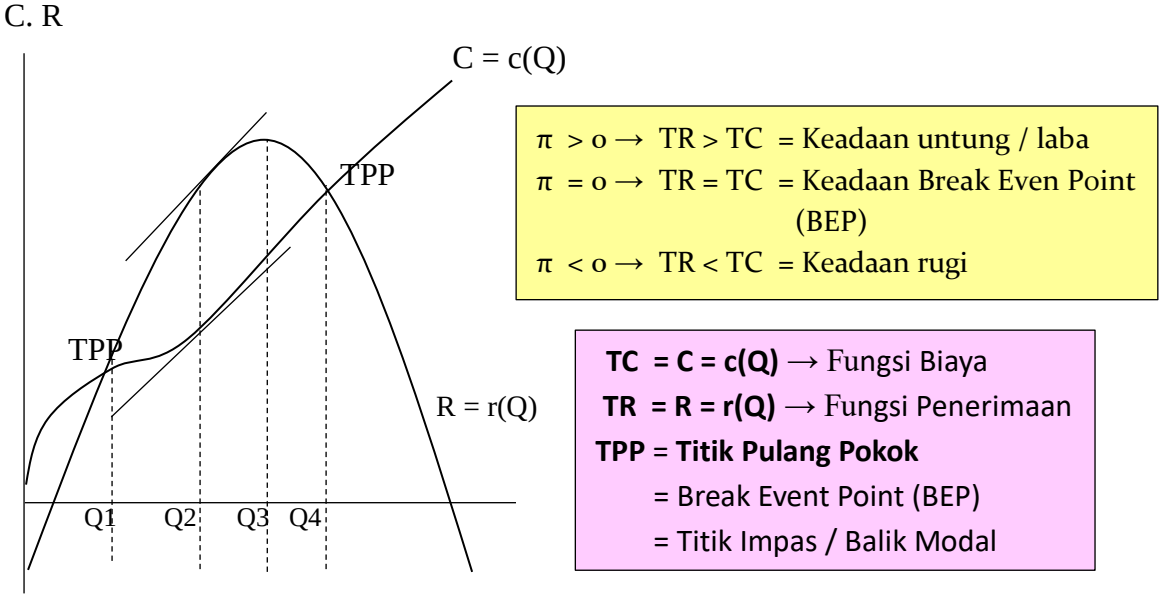
d. $R = 900\,Q - 1{,}5\,Q^2$

   R maksimum pada : $Q = \frac{-b}{2a} = \frac{-900}{-3} = 300$

   Besarnya R maksimum $= 900\,(300) - 1{,}5(300)^2 = 135.000$

VI. Laba/Rugi dan BEP (Break Even Point)

Analisis Pulang Pokok (***break-even***) yaitu suatu konsep yang digunakan untuk menganalisis jumlah minimum produk yang harus dihasilkan atau terjual agar perusahaan tidak mengalami kerugian. Keadaan pulang pokok (profit nol, $\pi = 0$) terjadi apabila R = C artinya perusahaan tidak memperoleh keuntungan tetapi tidak pula menderita kerugian. Tingkat produksi yang menghasilkan keuntungan, kerugian dan keadaan pulang-pokok secara grafik dapat dilihat sebagai berikut:



Tingkat produksi Q_1 dan Q_4 mencerminkan keadaan **pulang pokok**, sebab penerimaan total sama dengan pengeluaran (biaya) total, R = C. Area di sebelah kiri Q_1 dan di sebelah kanan Q_4 mencerminkan keadaan **rugi,** sebab penerimaan total lebih kecil daripada pengeluaran total, R < C. Sedangkan area di antara Q_1 dan Q_4 mencerminkan keadaan **untung**, sebab penerimaan total lebih besar daripada pengeluaran total, R > C. Tingkat produksi Q_3 mencerminkan tingkat produksi yang memberikan penerimaan total maksimum.

Besar kecilnya keuntungan dicerminkan oleh besar kecilnya selisih positif antara R dan C. Secara grafik, hal ini ditunjukkan oleh jarak antara kurva R dan kurva C. Semakin lebar jarak positif tersebut semakin besar keuntungan yang diperoleh. Jarak positif terlebar antara kurva R dan kurva C terjadi pada posisi di mana lereng (slope) dari kedua kurva itu sama besar, dan ini mencerminkan keuntungan terbesar atau maksimum. Dalam Gambar di atas, hal ini terjadi pada kedudukan Q_2 ; lereng kurva R dan kurva C pada tingkat produksi ini sama besar (perhatikan: garis-garis singgung yang ditarik pada kedua kurva tersebut sejajar).

Jarak positif terlebar antara kurva R dan kurva C tidak selalu terjadi pada saat kurva R mencapai maksimum, juga tidak mesti terjadi pada saat kurva C mencapai minimum. Dalam gambar di atas, R mencapai maksimum pada Q3 sedangkan jarak positif terlebar antara R dan C terjadi pada Q2. Ini berarti keuntungan maksimum tidak

selalu terjadi pada saat R maksimum atau C minimum. Dengan perkataan lain, R maksimum atau C minimum tidak selalu menghasilkan keuntungan maksimum.

Contoh Soal:

Penerimaan total yang diperoleh sebuah perusahaan ditunjukkan oleh persamaan $R = -0{,}10Q^2 + 20Q$, sedangkan biaya total yang dikeluarkan $C = 0{,}25Q^3 – 3Q^2 + 7\,Q + 20$. Hitunglah profit perusahaan ini jika dihasilkan dan terjual barang sebanyak 10 dan 20 unit.

Jawab :

Fungsi penerimaan : $R = -0{,}10Q^2 + 20Q$

Fungsi biaya : $C = 0{,}25Q^3 – 3Q^2 + 7\,Q + 20$

Fungsi keuntungan : $\pi = R – C$

$= (-0{,}10Q^2 + 20Q) – (0{,}25Q^3 - 3Q^2 - 7Q – 20$

$= -0{,}10Q^2 + 20Q) – 0{,}25Q^3 + 3Q^2 - 7Q – 20$

$\pi = -0{,}25\,Q^3 + 2{,}90\,Q^2 + 13\,Q - 20$

$Q = 10 \rightarrow \pi = -0{,}25\,(10)^3 + 2{,}90\,(10)^2 + 13\,(10) - 20$

$= -0{,}25(1000) + 2{,}90(100) + 13(10) - 20$

$= -250 + 290 + 130 – 20 = 150$ (untung)

$Q = 20 \rightarrow \pi = -0{,}25\,(20)^3 + 2{,}90\,(20)^2 + 13\,(20) - 20$

$= -0{,}25(8000) + 2{,}90(400) + 13(20) – 20$

$= 2000 + 1160 + 260 – 20 = -600$ (rugi)

Contoh Soal :

Penerimaan total yang diperoleh suatu perusahaan ditunjukkan oleh fungsi $R = – 0{,}1Q^2 + 300Q$, sedangkan biaya total yang dikeluarkannya $C = 0{,}3Q^2 – 720Q + 600.000$. Hitunglah :

a. Tingkat produksi yang menghasilkan penerimaan total maksimum ?
b. Tingkat produksi yang menunjukkan biaya total minimum ?
c. Manakah yang lebih baik bagi perusahaan, berproduksi menguntungkan pada tingkat produksi yang menghasilkan penerimaan total maksimum atau biaya total minimum ?

Jawab :

$R = – 0{,}1Q^2 + 300Q$

$C = 0{,}3Q^2 – 720Q + 600.000$

a. R maksimum terjadi pada $Q = \frac{-b}{2a} = \frac{-300}{-0{,}2} = 1500$ unit

b. C minimum terjadi pada $Q = \frac{-b}{2a} = \frac{-720}{-0{,}6} = 1200$ unit

c. π pada R maksimum

Q = 1500 $\pi = -0{,}4Q^2 + 1020Q - 600.000$

$= -0{,}4(1500)^2 + 1020(1500) - 600.000$

$= 30.000$

π pada C minimum

Q = 1200 $\pi = -0{,}4Q^2 + 1020Q - 600.000$

$= -0{,}4(1200)^2 + 1020(1200) - 600.000$

$= 30.000$

Bagi perusahaan berproduksi pada tingkat produksi yang menghasilkan penerimaan total maksimum (Q = 1500) atau biaya total minimum (Q = 1200) akan sama keuntungannya.

Latihan Soal :

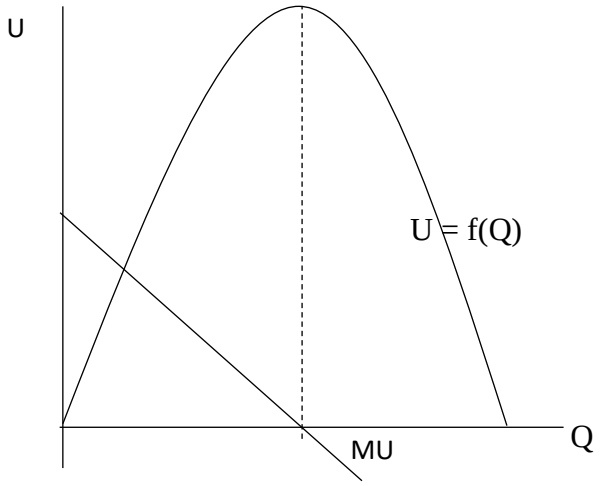
Suatu perusahaan menghasilkan suatu produk yang mempunyai biaya tetap sebesar $ 4000 dan biaya variabel dengan persamaan $VC = -140Q + Q^2$. Sedangkan permintaan barang tersebut ditunjukan oleh persamaan Q = 100 - P. Tentukan :

a. Persamaan fungsi penerimaan, fungsi biaya dan fungsi keuntungan perusahaan
b. Tentukan besarnya penerimaan total maksimum dan biaya total minimum!
c. Pada tingkat produksi berapa perusahaan mencapai BEP
d. Pada tingkat produksi berapa keuntungan maksimum dan berapa besarnya keuntungan tersebut.
e. Berapa harga yang terjadi pada kondisi keuntungan maksimum ?
f. Apa yang terjadi jika perusahaan memproduksi dan menjual produknya lebih banyak 1 unit dari jumlah produksi pada kondisi keuntungan maksimum
g. Hitunglah AC, AVC dan AFC pada kondisi keuntungan maksimum
h. Hitunglah penerimaan dan biaya marjinal berdasarkan perhitungan soal e dan f di atas !
i. Apa yang terjadi jika perusahaan memproduksi sebanyak 105 unit ?
j. Gambarkan fungsi penerimaan dan fungsi biaya pada bidang grafik yang sama.

III. Fungsi Utilitas

Fungsi utilitas menjelaskan besarnya utilitas (kepuasan, kegunaan) yang diperoleh seseorang dari mengkonsumsikan suatu barang atau jasa. Pada umumnya semakin banyak jumlah suatu barang dikonsumsi semakin besar utilitas yang diperoleh, kemudian mencapai puncaknya (titik jemuh) pada jumlah konsumsi tertentu, sesudah itu justru menjadi berkurang atau bahkan negatif bila jumlah barang yang dikonsumsi terus menerus ditambah.

Utilitas total merupakan fungsi dari jumlah barang yang dikonsumsi. Persamaan utilitas total (total utility, U) dari mengkonsumsikan suatu jenis barang berupa fungsi kuadrat parabolik, dengan kurva berbentuk parabola terbuka ke bawah. **Utilitas marjinal** (marginal utility, MU) ialah utilitas tambahan yang diperoleh dari setiap tambahan satu unit barang yang dikonsumsi.



Utilitas total:

$U = f(Q)$

Utilitas Marjinal:

$MU = \frac{\Delta U}{\Delta Q}$

IV. Fungsi Produksi

Bentuk fungsi produk total (*total product, P)* yang non-linear pada umumnya berupa persamaan kubik yang mempunyai titik belok dan sebuah titik puncak. **Produk total** merupakan fungsi dari jumlah masukan (input, faktor produksi) yang digunakan. Dalam konsep produksi juga di kenal pengertian rata-rata dan marjinal. **Produk rata -rata** (avarage product, AP) ialah jumlah keluaran atau produk yang dihasilkan dari setiap unit masukan yang digunakan, merupakan hasil bagi produk total terhadap jumlah masukan. Sedangkan **produk marjinal** (*marginal product*, MP) ialah produk tambahan yang dihasilkan dari setiap tambahan satu unit masukan yang digunakan.

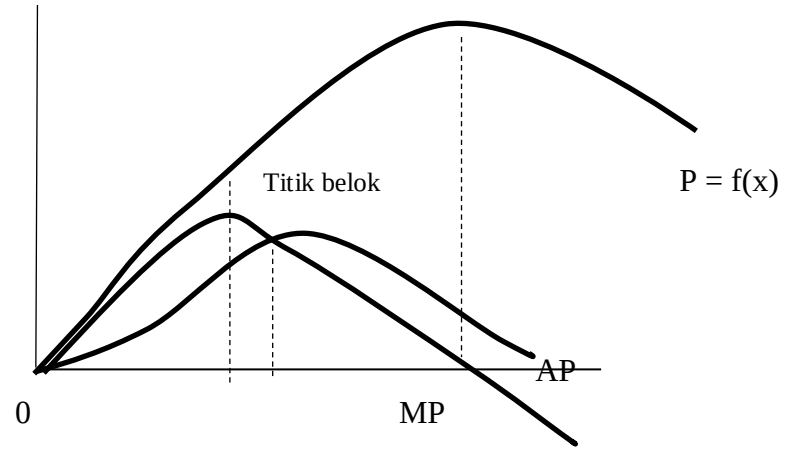
Jika dalam suatu kegiatan produksi dianggap hanya terdapat satu masukan variabel, katakanlah X, sementara masukan-masukan biaya merupakan masukan tetap, maka fungsi produksinya dapat dinyatakan dengan notasi P = f(x).

Produk total : $P = f(x)$

Produk rata-rata : $AP = \frac{P}{X}$

Produk marjinal : $MP = \frac{\Delta P}{\Delta X}$

Secara grafik, kurva produk total P mencapai puncaknya tepat ketika kurva produk marjinal MP = 0. Sedangkan MP mencapai puncaknya tepat pada posisi titik belok kurva P. Di samping itu, kurva MP memotong kurva AP pada posis maksimum AP.



Contoh Soal:

Fungsi produksi yang dihadapi oleh seoarng produsen di tunjukan oleh $P = 9X^2 - X^3$. Bentuklah persamaan produk rata-ratanya serta hitunglah produk total dan produk rata-rata tersebut jika digunakan masukan sebanyak 6 unit. Berapa produk marjinalnya jika masukan yang digunakan ditambah 1 unit?

Jawab:

Fungsi produksi $P = 9X^2 - X^3$

Fungsi produk rata-rata : $AP = \frac{P}{X} = 9X - X^2$

Jika $X = 6 \rightarrow P = 9(6)^2 - (6)^3 = 108$

$$AP = 9(6) - (6)^2 = \frac{108}{6} = 18$$

Jika $X = 7 \rightarrow P = 9(7)^2 - (7)^3 = 98$

$$AP = 9(7) - (7)^2 = \frac{98}{7} = 14$$

Produk marjinal: $MP = \frac{\Delta P}{\Delta Q} = \frac{98-108}{7-6} = -10$

BAB VI
DIFERENSIAL FUNGSI SEDERHANA

Diferensial membahas tentang tingkat perubahan suatu fungsi sehubungan dengan perubahan kecil dalam variabel bebas fungsi yang bersangkutan. Dengan diferensial dapat disidik kedudukan-kedudukan khusus dari fungsi yang sedang dipelajari seperti titik maksimum, titik belok dan titik minimumnya.

Secara umum, membentuk turunan sebuah fungsi dapat dilakukan dengan cara terlebih dahulu menemukan kuosien diferensinya, kemudian menentukan limit kuosien diferensi tersebut untuk pertambahan variabel bebas mendekati nol.

I. Hakikat derivatif dan Diferensial

Misal $y = f(x)$ dan terdapat tambahan variabel bebas x sebesar Δx ,

Maka :
$$y = f(x)$$
$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - y$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Δ x adalah tambahan x, sedangkan Δ y adalah tambahan y akibat adanya tambahan x. Jadi Δy timbul karena adanya Δx.

Apabila pada persamaan (1) ruas kiri dan ruas kanan sama-sama dibagi Δx, maka diperoleh

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Bentuk $\Delta y / \Delta x$ inilah yang disebut sebagai hasil bagi perbedaan atau **kuosien** diferensi (difference quotient), yang mencerminkan tingkat perubahan rata-rata variabel terikat y terhadap perubahan variabel bebas x

Proses penurunan fungsi disebut juga **proses diferensiasi** → merupakan penentuan limit suatu kuosien diferensi (Δx sangat kecil)

Hasil proses diferensiasi dinamakan turunan atau **derivatif** (*derivative*).

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \text{lereng dari kurva } y = f(x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

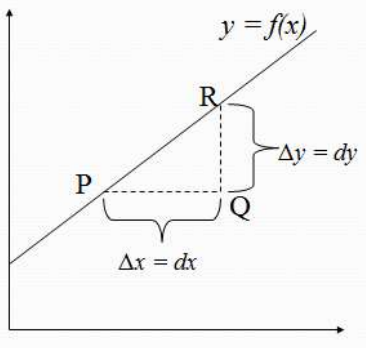
dy/dx : terdiri dari 2 suku → dy dinamakan diferensial y,
dx merupakan diferensial dari x.

- ✓ dy/dx adalah lereng taksiran (approximated slope) dari kurva y= f(x) pada kedudukan x tertentu.
- ✓ $\Delta y/\Delta x$ → lereng yang sesungguhnya (the true slope)

- ✓ Lereng taksiran ini dapat lebih besar (over estimated), atau lebih kecil (under estimated), atau sama dengan lereng sesungguhnya (teragantung pada jenis fungsinya dan besar kecilnya perubahan pada variabel bebas)
- ✓ Cara penotasian dari turunan suatu fungsi dapat dilakukan dengan beberapa macam :

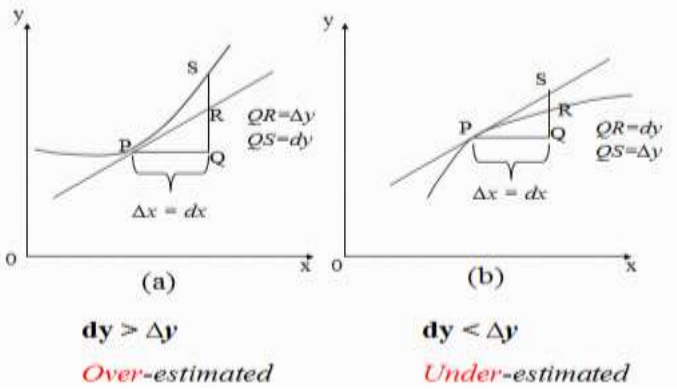
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \equiv y' \equiv f'(x) \equiv y_x \equiv f_x(x) \equiv \frac{dy}{dx} \equiv \frac{df(x)}{dx}$$

- Jika fungsi ***y = f(x)* yang linier**,
- Maka lereng taksiran = lereng sesungguhnya, berapapun Δx ➔ $dy/dx = \Delta y/\Delta x$



Perubahan x = Δx
Perubahan y = Δy
Diferensial x = dx
Diferensial y = dy
Kuosien diferensi = $\Delta y/\Delta x$
Derivatif = dy/dx

- Jika fungsi ***y = f(x)* yang non-linier**



II. Kaidah – kaidah Diferensial

1. Diferensiasi konstanta
Jika y = k, dimana k adalah konstanta, maka dy/dx = 0
contoh : y = 5 → y' = dy/dx = 0

2. Diferensiasi fungsi pangkat
Jika $y = x^n$, dimana n adalah konstanta , maka $y' = dy/dx = nx^{n-1}$
contoh : y = x3 → y' = dy/dx=3x3-1=3x2

3. Diferensiasi perkalian konstanta dengan fungsi
Jika y = kv, dimana v = h(x), maka y' = dy/dx = k dv/dx
contoh : y = 5x3 → y' = dy/dx = $5(3x^2) = 15x^2$

4. Diferensiasi pembagian konstanta dengan fungsi

jika y = k/v, dimana v = h(x), maka : $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{kdv}{dx}}{v^2}$,

contoh : y = $\frac{5}{d^3}$ → y' = $\frac{dy}{dx} = -\frac{5\,(3x^2)}{(x^3)^2} = -\frac{15x^2}{x^6}$

5. Diferensiasi penjumlahan (pengurangan) fungsi

jika y = u ± v, dimana u = g(x) dan v =h(x) maka dy/dx = du/dx + dv/dx

contoh : y = $4x^2 + x^3$ → u = $4x^2$ → u' = du/dx = 8x

v =x^3, → v' = dv/dx = $3x^3$

y' = dy/dx = du/dx + dv/dx = 8x + $3x^2$

6. Diferensiasi perkalian fungsi

Jika y = uv, dimana u = g(x) dan v = h(x)

Maka y' = $\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

Contoh : y = $(4x^2)(x^3)$ → y' = dy/dx = $(4x^2)(3x^2) + (x^3)(8x^2) = 12x^4 + 8x^4 = 20x^4$

7. Diferensiasi pembagian fungsi

Jika y = u/v dimana u = g(x) dan v = h(x)

Maka y' = $\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

Contoh : y = $\frac{4x^2}{x^3}$

y' = $\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{V^2} = \frac{(x^3)(8x) - (4x^2)(3x^2)}{(x^3)^2} = \frac{8x^4 - 12x^4}{x^6} = -\frac{4}{x^2} = -4x^{-2}$

8. Diferensiasi Fungsi Komposit

Jika y = f(u) sedangkan u = g(x), dengan bentuk lain y = f{g(x)}, maka :

y' = $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Contoh : y = $(4x^3 + 5)^2$ misal u = $4x^3+5 \rightarrow y = u^2$

$\frac{du}{dx} = 12x^2 \rightarrow \frac{dy}{du} = 2u$

y' = $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ = 2u $(12x^2) = 2(4x^3 + 5)(12x^2) = 96\,x^5 + 120x^2$

9. Diferensiasi fungsi berpangkat

Jika y = u^n , dimana u = g(x) dan n adalah konstanta, maka dy/dx = nu^{n-1}.(du/dx)

Contoh : y =$(4x^3 + 5)^2$ misal $u = 4x^3 + 5$ → $\frac{du}{dx} = 12x^2$

y' = $\frac{dy}{dx} = nu^{n-1} \cdot \frac{du}{dx}$ = $2(x^3 + 5)(12x^2) = 96x^5 = 120x^2$

10. Diferensiasi fungsi logaritmik

Jika y = $^{a}\log_x$, maka y' = $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln a}$

Contoh : y = $^{a}\log_2$ → y' = $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln a} = \frac{1}{2 \ln 5}$

11. Diferensiasi fungsi komposit logaritmik

Jika y = $^{a}\log$ u, dimana u = g(x), maka : **y' = dy/dx = $\frac{^{a}\log e}{u} \cdot \frac{du}{dx}$**

Contoh : y = $\log \frac{x-3}{x+2}$

misalkan : u = $\frac{(x-3)}{(x+2)} \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{(x+2)-(x-3)}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}$

y' = dy/dx = $^{a}\log e \cdot \frac{5}{(x+2)^2} = \frac{5 \log e}{(x-3)(x+2)} = \frac{5 \log e}{(x^2-x-6)}$

12. Diferensiasi fungsi komposit logaritmik-berpangkat

Jika y = $(^{a}\log u)^n$, dimana u = g(x) dan n adalah konstanta, maka :

y' = $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} {}^{a}\log e \cdot \frac{du}{dx}$

Contoh : y = $(\log 5x^2)^3$

Misalkan u = $5x^2 \rightarrow \frac{du}{dx} = 10x$

y' = $\frac{dy}{dx} = 3(log 5x^2)^2 (\frac{\log e}{5x^2})$ (10x)

= $\frac{30x(log 5x^2).\log e}{5x^2} = \frac{6}{x} (log\ 5x^2)\ ^{2}\log e$

13. Diferensiasi fungsi logaritmik-Napier

Jika y = In x, maka y' = dy/dx = 1/x

Contoh : y = In5, dy/dx= 1/x=1/5

14. Diferensiasi fungsi Komposit Logaritmik-Napier

Jika y = In u, dimana u = g(X), maka : y' = $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$

Contoh : y = In$\left(\frac{x-3}{x+2}\right)$

Misalkan: u = $\frac{(x-3)}{(x+2)} \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{5}{(x+2)^2}$

y' = $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{(x+2)}{(x-3)} \cdot \frac{5}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x^2-x-6)}$

15. Diferensiasi fungsi KompositLogaritmik-Napier-berpangkat

Jika y = $(\text{In u})^n$, dimana u = g(x) dan n : konstanta , maka :

y' = $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

Contoh ; y = $(\text{In } 5\ x^2)^3$

Misalkan u = $5x^2 \rightarrow \frac{du}{dx} = 10x$

$\frac{dy}{dx} = 3(In5x^2)^2\left(\frac{1}{5x^2}\right)(10x) = \frac{6}{x}(In\ 5x^2)^2$

16. Diferensiasi fungsi eksponensial

y = a^x , dimana a : konstanta, maka: y' = $\frac{dy}{dx} = a^x In\ a$

Contoh : y = 5^x

y' = $\frac{dy}{dx} = a^x$ In a =5^x In 5

Dalam hal y = e^x, maka $\frac{dy}{dx} = e^x$ juga, sebab In e = 1

17. Diferensasi fungsi komposit – eksponensial

Jika y = a^u dimana u = g(x), maka : y' = $\frac{dy}{dx}$ = a^u In a $\frac{du}{dx}$

Contoh : y = 9^{3x2-4} misalkan u = $3x^2$ - 4→ $\frac{du}{dx}$ = 6x

y' = $\frac{dy}{dx}$ = a^uIn a $\frac{du}{dx}$ = 9^{3x2-4} (In 9)(6x) = 9(6x)9^{3x2-4} In 9

Kasus khusus: dalam hal y = e^u , maka y' = $\frac{dy}{dx}$ = e^u $\frac{du}{dx}$

18. Diferensiasi fungsi kompleks

Jika y = u^v, dimana u = g(x) dan v = h(x) maka : y' = $\frac{dy}{dx}$ = vu $^{v-1}$. $\frac{du}{dx}$ + u^v . In u . $\frac{dv}{dx}$

Contoh : y = $4x^{x3}$, misalkan : u = 4x→ du/dx = 4

v = x^3 → dv/ dx = $3x^2$

y' = $\frac{dy}{dx}$ = vu $^{v-1}$. $\frac{du}{dx}$ + u^v . In u . $\frac{dv}{dx}$

= (x^3) 4x $^{x3-1}$ (4) + 4x ^{x3} In 4x ($3x^2$)

= 16x $^{x3+2}$ + 12x $^{x3+2}$ In 4x

= 4x $^{x3+2}$ (4+ 3In 4x)

19. Diferensiasi fungsi balikan

Jika y = f(x) dan x = g(x) adalah fungsi – fungsi yang saling berbalikan (inverse functions) maka: y' = $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dy/dx}$

Contoh : x = 5y + 0,5 y^4

y' = $\frac{dy}{dx}$ = 5 + $2y^3$ → $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dy/dx} = \frac{1}{(5+2y3)}$

20. Diferensiasi Implisit

Jika f (x, y)=0 merupakan fungsi implisit sejati (tidak mungkin dieksplisitkan), dy/dx dapat diperoleh dengan mendiferensiasikan suku demi suku, dengan menganggap y sebagai fungsi dari x.

Contoh :

$4xy^2 - x^2 + 2y = 0$, tentukan $\frac{dy}{dx}$

$8xy\frac{dy}{dx} + 4y^2 - 2x + 2\frac{dy}{dx} = 0$

$(8xy+ 2)\frac{dy}{dx} = 2x - 4y^2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 4y^2}{8xy + 2} = \frac{x - 2y^2}{4xy + 1}$

III. Hubungan Fungsi dan Derivatifnya

Pendekatan kalkulus diferensial amat berguna untuk menyidik bentuk gambar suatu fungsi non-linear. Dengan mengetahui besarnya harga dari turunan pertama dan turunan kedua sebuah fungsi, akan dapat dikenali bentuk gambar dari fungsi tersebut. Hubungan antara fungsi non-linear dan derivatif pertamanya, untuk mengetahui apakah kurvanya menaik ataukah menurun pada kedudukan tertentu. Sedangkan Hubungan antara fungsi parabolik dan derivatifnya, untuk mengetahui letak dan bentuk titik ekstrimnya (maksimum dan minimum); serta hubungan antara fungsi kubik dan derivatif-nya, guna mengetahui letak dan bentuk titik ekstrim serta letak titik beloknya.

Fungsi y = f(x)	**Kegunaan**	**Kondisi / Syarat**
1. Turunan I **y' = f' (x)**	1. Mengetahui **letak titik ekstrim**	**$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) = 0$**
	2. Mengetahui apakah suatu fungsi menaik atau menurun pada titik tertentu : • Fungsi **menaik** (slope kurva **positif**)	**$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) > 0$**
	• Fungsi **menurun** (slope kurva **negatif**)	**$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) < 0$**
2. Turunan II **y" = f" (x)**	1. Mengetahui **jenis titik ekstrim** : • Titik **Ekstrim maksimum** (x,y)	Pada y' = 0 **$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) < 0$**
	• Titik **Ekstrim minimum** (x,y)	**$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) > 0$**
	2. Mencari **titik bel**ok fungsi	**y" = 0**

1. Menentukan persamaan Garis singgung dan Garis Normal

Langkah – langkah untuk mencari Garis singgung dan Garis normal adalah :

1) Tentukanlah titik singgung (x_1 , y_1)

2) Cari koefisien arah : $m = f'(x_1)$

3) Cari Garis singgung dengan rumus : $y - y_1 = m\,(x - x_1)$

4) Cari Garis Normal dengan rumus : $y - y_1 = \frac{-1}{m}(x - x_1)$

Catatan :

Garis Normal adalah garis yang tegak lurus pada garis singgung kurva.

Contoh :

Diketahui kurva dengan persamaan $y = x^2 - x - 6$. Tentukan :

a. Persamaan garis singgung di x = 2

b. Persamaan garis normal di titik tersebut

Jawab :

a. $y = x^2 - x - 6$ dengan x = 2

$y = (2)^2 - (2) - 6$

$y = -4$

Diperoleh titik singgung di (2, –4)

y' = f'(x) = 2x – 1
m = f'(2) = 2(2) – 1 = 4 – 1 = 3
Diperoleh gradien garis singgung m = 3

Persamaan garis singgung $y - y_1 = 3\,(x - x_1)$
$y - (-4) = 3(x - 2)$
$y + 4 = 3x - 6$
$y = 3x - 10$ atau $3x - y - 10 = 0$

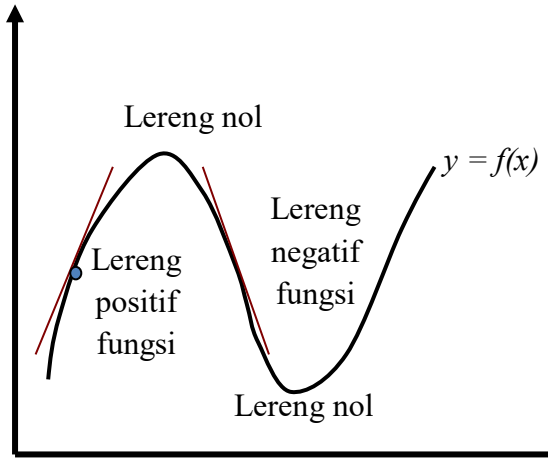
b. Persamaan garis normal $y - y1 = \frac{-1}{m}(x - 2)$
$y + 4 = \frac{-1}{3}(x - 2)$
$3y + 12 = -x + 2$
$3y = -x + 2 - 12$
$y = \frac{-x - 10}{3}$

2. Menentukan Keadaan Fungsi Menaik dan Fungsi Menurun

Diketahui titik (a, b) pada grafik fungsi y = f(x)
1) Jika f' (a) > 0, maka fungsi naik pada titik tersebut
2) Jika f' (a) > 0, maka fungsi turun pada titik tersebut
3) Jika f' (a) = 0, maka titik (a,b) merupakan titik stasioner/ titik ekstrim/ titik balik

Jenis-jenis titik stasioner adalah :

- Jika f''(a) > 0, maka (x,y) merupakan titik balik minimum
- Jika f''(a) < 0, maka (x,y) merupakan titik balik maksimum
- Jika f''(a) = 0, maka (x,y) merupakan titik belok



f'(a) > 0, y = f(x) menaik
f'(a) < 0, y = f(x)menurun

Contoh :

Diketahui fungsi $y = x^2 + 6x - 24$. Tentukan apakah pada titik-titik dengan absis berikut maka fungsinya naik, turun, atau stasioner (Jika stasioner maka tentukan apakah minimum, maksimum, atau titik belok)

a. x = 2 b. x = –5 c. x = –3

Jawab :
$y = x^2 + 6x - 24$ maka $y' = f'(x) = 2x + 6$
a. $x = 2$
$f'(2) = 2(2) + 6$
$f'(2) = 4 + 6$
$f'(2) = 10$ **Karena f'(2) > 0 maka pada x = 2 berupa fungsi naik**

b. $x = -5$
$f'(-5) = 2(-5) + 6$
$f'(-5) = -10 + 6$
$f'(-5) = -4$ **Karena f'(–5) < 0 maka pada x = –5 berupa fungsi turun**

c. $x = -3$
$f'(-3) = 2(-3) + 6$
$f'(-3) = -6 + 6$
$f'(-3) = 0$ **Karena f'(–3) = 0 maka pada x = –3 merupakan titik stasioner**

Karena berupa titik stasioner, maka perlu diselidiki apakah maksimum, minimum, atau titik belok (dilihat dari turunan kedua).
$f'(x) = 2x + 6$ maka $f''(x) = 2$
Karena $f''(x) = 2 > 0$ maka pada $x = -3$ merupakan titik stasioner yang minimum

3. **Uji Tanda**

- Apabila turunan pertama *f'(x) = 0*, berarti *y = f(x)* berada di titik ekstrim
- Untuk menentukan apakah titik ekstrim tersebut merupakan titik maksimum ataukah minimum, maka perlu dilakukan uji tanda terhadap *f'(a) = 0*.
- Jika *f'(x) > 0* untuk *x < a* dan *f'(x) < 0* untuk *x > a*, maka titik ekstrimnya adalah **titik maksimum**.
- Jika *f'(x) < 0* untuk *x < a* dan *f'(x) > 0* untuk *x > a*, maka titik ekstrimnya adalah **titik minimum**.

Contoh :

Tentukan apakah $y = f(x) = 1/3\ x^3 - 4\ x^2 + 12\ x - 5$ merupakan fungsi menaik ataukah fungsi menurun pada x = 5 dan x = 7. Selidiki pula untuk x = 6.

Jawab :

$f'(x) = x^2 - 8\ x + 12$
$f'(5) = 5^2 - 8\ (5) + 12 = -3 < 0$, berarti y = f(x) menurun pada x = 5
$f'(7) = 7^2 - 8\ (7) + 12 = 5 > 0$, berarti y = f (x) menaik pada x = 7
$f'(6) = 6^2 - 8\ (6) + 12 = 0$, berarti y = f(x) berada di titik ekstrim pada x = 6;
karena $f'(x) < 0$ untuk $x < 6$ dan $f'(x) > 0$ untuk $x > 6$, titik ekstrim pada x = 6
ini adalah titik minimum.

Apabila diselidiki lebih lanjut, sesungguhnya f ’ (x) < 0 hanya berlaku untuk interval 2< x <6. Pada kedudukan x = 2, y = f(x) berada di titik ekstrim yang lain, yaitu titik maksimum.

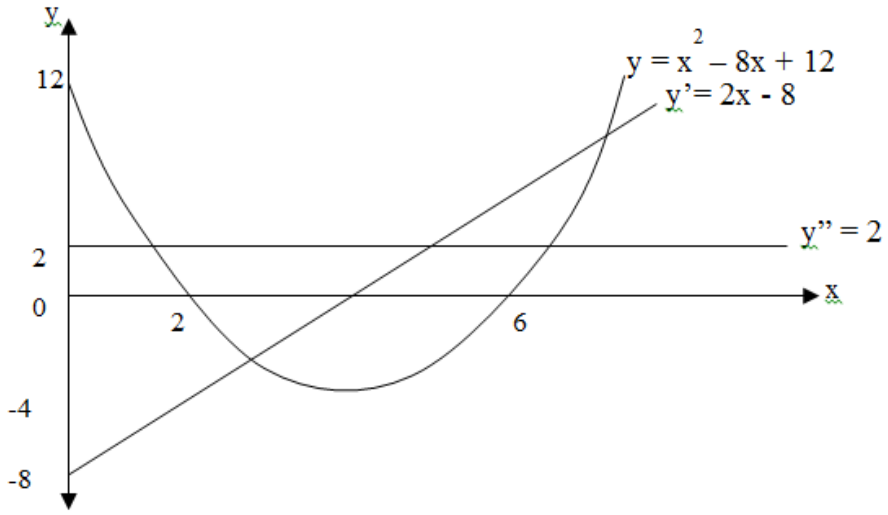
4. Titik ekstrim fungsi parabolik

Turunan pertama dari fungsi parabolik *y = f(x)* berguna untuk menentukan letak titik ekstrimnya. Sedangkan turunan kedua berguna untuk mengetahui jenis titik ekstrim yang bersangkutan. Perhatikan fungsi parabolik berikut dan turunan-turunannya, serta hubungan secara grafik

$y = f(x) = x^2 - 8x + 12$ ……*fungsi parabolik*
$y' = f'(x) = dy/dx = 2x - 8$ ……*fungsi linear*
$y'' = f''(x) = d^2y/dx^2 = 2$ ……*konstanta*

Pembahasan ;

Jika y’ = 0, → 2x – 8 = 0 maka nilai variabel bebas x = 4.
x = 4 → dimasukkan ke dalam persamaan parabola → y = f(x) = 42 – 8(4)+ 12 = -4
Parabola y = f(x) = x2 - 8x + 12 , mencapai titik ekstrim pada koordinat (4, -4) dan merupakan titik ekstrim minimum (y” = f” (x) = 2 > 0



- Parabola *y = f(x)* mencapai titik ekstrim pada *y’ = 0*
- Jika *y” < 0* : bentuk parabolanya terbuka ke bawah, titik ekstrimnya adalah titik maksimum.
- Jika y” > 0 : bentuk parabolanya terbuka ke atas, titik ekstrimnya adalah titik minimum.

C. Nilai Ekstrim Fungsi

Titik maksimum atau minimum fungsi kubik, serta titik beloknya dapat dicari melalui turunan pertama dan kedua dari fungsi tersebut. Derivatif pertama berguna menentukan

letak titik ekstrimnya, sedangkan derivatif kedua bermanfaat mengetahui jenis titik ekstrim dan menentukan letak titik beloknya .

Perhatikan fungsi kubik dan turunannya berikut :

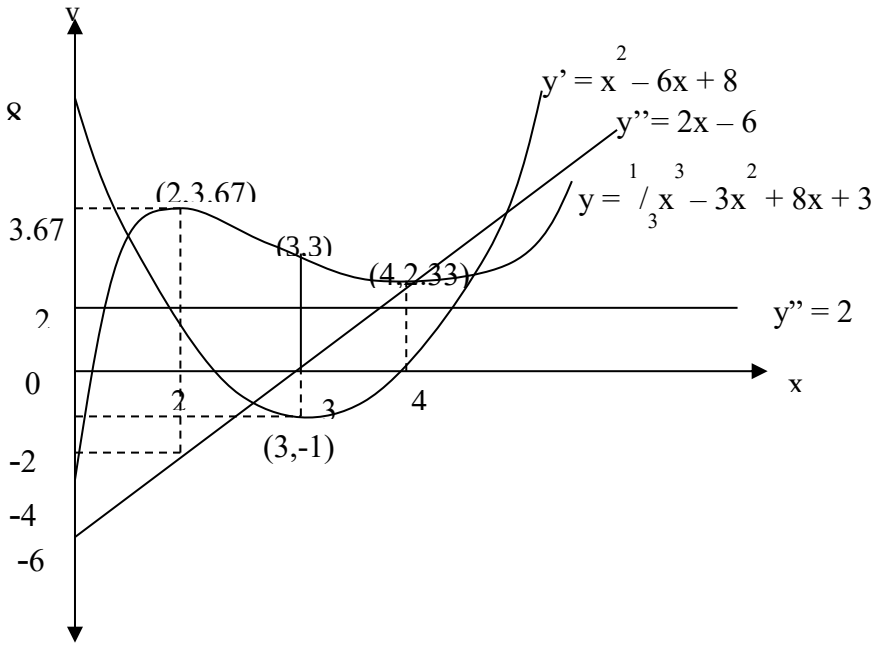
$y = 1/3x^3 - 3x^2 + 8x - 3$ ……*fungsi kubik*

$y' = x^2 - 6x + 8$ ……*fungsi kuadratik*

$y'' = 2x - 6$ ……*fungsi linear*

- Jika $y' = 0, \rightarrow \quad x^2 - 6x + 8 = 0$

  $(x - 2)(x - 4) = 0 \rightarrow x_1 = 2, \; x_2 = 4$
- Untuk $x_1 = 2$ dimasukkan pada persamaan kubik → $y = 1/3(2)^3 - 3(2)^2 + 8(2) - 3$ maka $y = 3.67$
- Untuk $x_1 = 2$ apabila dimasukkan dalam turunan ke dua, maka $y'' = -2 < 0$ (turunan kedua negatif) → titik ekstrim maksimum *(2, 3.67)*
- Untuk $x_2 = 4$ dimasukkan pada persamaan kubik → $y = 1/3(4)^3 - 3(4)^2 + 8(4) - 3$ maka $y = 2.33$
- Untuk $x_2 = 4$ apabila dimasukkan dalam turunan ke dua, maka $y'' = 2 > 0$ (turunan kedua positif) → titik ekstrim minimum *(4, 2.33)*
- Jika y" = 0 → 2x – 6 = 0 → x = 3, nilai x = 3 dimasukkan dalam persamaan kubik → didapatkan nilai y = 3 → titik belok (3,3)



BAB VII

APLIKASI DIFERENSIAL SEDERHANA DALAM EKONOMI

I. Elastisitas Permintaan, Penawaran dan Produksi

Elastisitas adalah persentase perubahan y terhadap persentase perubahan x.

✸ **Elastisitas Permintaan**

Elastisitas Permintaan adalah besarnya perubahan jumlah permintaan barang akibat adanya perubahan harga.

Rumus : $\eta_d = \frac{dQd}{dP} \cdot \frac{P}{Qd}$ Qd = fungsi permintaan , P = harga

Permintaan suatu barang dikatakan bersifat:

1. **Elastis** → jika $\eta_d > 0$ → jika harga barang tersebut berubah sebesar presentase tertentu, maka permintaan terhadapnya akan berubah dengan persentase yang lebih besar daripada perubahan harganya
2. **Inelastis** → jika $\eta_d < 1$ → jika harga barang tersebut berubah sebesar presentase tertentu, maka permintaan terhadapnya akan berubah dengan persentase yang lebih kecil daripada perubahan harganya
3. **Uniter** → jika $\eta_d = 0$ → jika harga barang tersebut berubah sebesar presentase tertentu, maka permintaan terhadapnya akan berubah dengan persentase yang sama dengan perubahan harganya

Contoh :

Diketahui Fungsi permintaan akan suatu barang → $Q = 25 - 3P^2$
Tentukan elastisitas permintaannya pada tingkat harga P = 5.

Jawab :

$$\eta_d = \frac{dQ_d}{dP} \cdot \frac{P}{Q_d} = (-6P)\frac{P}{25-3P^2}$$

$$= -6(5)\frac{(5)}{25-3(5)^2} = 3$$

$\eta_d = 3$ (elastis) artinya pada kedudukan harga P = 5, jika harga barang naik sebesar 1 %, maka permintaannya akan turun sebanyak 3 % .

✸ **Elastisitas Penawaran**

Elastisitas Penawaran adalah besarnya perubahan jumlah barang yang ditawarkan, jika ada perubahan harga.

Rumus : $\eta_s = \frac{dQ_s}{dP} \cdot \frac{P}{Q_s}$ Qs = fungsi permintaan , P = harga

Penawaran suatu barang dikatakan bersifat :

1. Elastis : jika $|\eta_d| > 0$
2. Inelastis : jika $|\eta_d| < 0$
3. Uniter : jika $|\eta_d| = 0$

Contoh :

Fungsi penawaran suatu barang diperlihatkan → $Q = -200 + 7P^2$

Tentukan elastisitas penawarannya, pada tingkat harga P = 10

Jawab :

$\eta_s = \frac{dQ_s}{dP} \cdot \frac{P}{Q_s} = (14\,P)\,\frac{p}{-200 + 7P^2}$

Pada $P = 10 \rightarrow \eta_s = (14)(10)\,\frac{(10)}{-200 + (7)(10)^2} = 2{,}8$ (elastis)

$\eta_s = 2{,}8$ artinya pada kedudukan harga P = 10, jika harga barang naik 1 % , maka jumlah barang yang ditawarkan juga akan naik sebanyak 2,8 %.

- **Elastisitas Produksi**

Elastisitas produksi adalah besarnya perubahan jumlah output yang dihasilkan, karena adanya perubahan jumlah input.

Rumus : $\eta_p = \frac{dP}{dx} \cdot \frac{x}{P}$ keterangan : P = Jumlah produk yang dihasilkan (output)

X = jumlah faktor produksi yang digunakan (input)

Contoh :

Fungsi produksi suatu barang ditunjukkan $P = 6X^2 - X^3$. Hitung elastisitas produksinya, pada tingkat penggunaan faktor produksi (input) sebesar X = 3

Jawab :

$\eta_p = \frac{dP}{dx} \cdot \frac{x}{P} = (12X - 3X^2)\,\frac{X}{6X^2 - X^3}$

Pada $x = 3 \rightarrow \eta_p = (12.3 - 3.3^2)\,\frac{3}{6(3)^2 - (3)^3} = 1$

$\eta_p = 1$ (uniter) artinya pada tingkat penggunaan input x = 3, jika input ditambah 1%, maka jumlah produksi (output) juga akan bertambah 1%.

II. Konsep Nilai Marjinal, Nilai Ekstrim Pada Fungsi Biaya

1. Konsep marginal

Biaya marginal (marginal cost atau MC) didefinisikan sebagai perubahan dalam biaya total (total cost atau TC) yang terjadi sebagai akibat dari produksi suatu unit tambahan. **Pendapatan marginal** (marginal revenue atau MR) didefinisikan sebagai perubahan dalam pendapatan total (total revenue atau TR) yang disebabkan oleh penjualan suatu barang tambahan. Karena baik biaya total maupun pendapatan total merupakan fungsi dari tingkat output (Q), maka biaya marginal dan pendapatan marginal masing-masing dapat dinyatakan secara matematis sebagai turunan dari fungsi total mereka masing-masing.

Jika TC = TC(Q), maka $\text{MC} = \frac{dTC}{dQ}$

Dan jika TR = TR(Q), maka $\text{MR} = \frac{dTR}{dQ}$

Konsep marginal dari setiap fungsi ekonomi dapat dinyatakan sebagai turunan dari fungsi totalnya.
Contoh :
Jika TR = 75Q - $4Q^2$, maka MR = dTR/dQ = 75 – 8Q.
Jika TC = Q2 + 7Q + 23, maka MC = dTC/dQ = 2Q + 7.

2. Biaya

a. **Biaya Total** (Total Cost, TC) Adalah seluruh biaya yang dibutuhkan untuk memproduksi/memasarkan sejumlah barang/jasa, baikyang merupakan biaya tetap (Fixed Cost, FC) atau biaya variabel (Variable Cost, VC)

TC = f(Q) atau TC = FC + VC

b. **Biaya Rata-rata** (Average Cost, AC) Adalah biaya per unit yang dibutuhkan untuk memproduksi suatu barang/jasa pada tingkat produksi total.

AC = TC/Q

Contoh 1 :

Fungsi Total Biaya suatu perusahaan dinyatakan dengan sebagai berikut:

$$C = Q^3 - 4Q^2 + 10Q + 75$$

Bagaimanakah fungsi marginal biayanya (marginal cost) dan berapakah nilai marginal biaya tersebut jika perusahaan memproduksi 2 penjualan, serta terangkan artinya

Jawab*:*

Fungsi total biaya (total biaya);

$$C = Q^3 - 4Q^2 + 10Q + 75$$

Fungsi marginal biaya (marginal cost):

$$C' = 3Q^2 - 8Q + 10$$

Jika perusahaan berproduksi pada tingkat penjualan Q=2, maka

$$MC = C' = 3Q^2 - 8Q + 10 = 3(2)^2 - 8(2) + 10 = 12 - 16 + 10 = 8$$

Artinya: untuk setiap peningkatan penjualan Q yang dijual sebnayak 1 unit akan menyebabkan adanya tambahan biaya sebesar 8, sebaliknya untuk setiap penurunan penjualan Q yang dijual seebanyak 1 unit akan menyebabkan adanya penurunan biaya sebesar 8.

Contoh 2 :

Biaya total dinyatakan dengan C (cost) = $5Q^2 - 1.000Q + 85.000$

Pada tingkat produksi berapakah akan menyebabkan total biaya minimum?

Berapakah total biaya minimum tersebut?

Jawab:

C = $5Q^2 - 1.000Q + 85.000$

C'= $10Q - 1.000 = 0$

$10Q = 1.000$

$Q = 100$

$C'' = 10 > 0$

Jadi total biaya minimum akan tercapai jika berproduksi sebanyak 100 unit.

Total biaya minimum sebesar:

$C = 5Q^2 - 1.000Q + 85.000$

$C = 5(100)^2 - 1.000(100) = 85.000$

$C = 35.000$

Jadi total biaya minimum sebesar 35.000

3. Penerimaan

a. **Penerimaan Total** (*Total Revenue*, TR) adalah total hasil penerimaan penjualan dari produk yang diproduksi

$$TR = f(Q) = P \cdot Q$$

b. **Penerimaan Rata-rata** (*Average Revenue*, AR) adalah hasil dari penerimaan per unit yang diperoleh dari penjualan suatu barang/jasa pada kuantiats tertentu. Fungsi Average Revenue sama dengan fungsi permintaan dari harga barang tersebut

$$AR = \frac{\mathbf{TR}}{\mathbf{Q}} = \frac{\mathbf{P \times Q}}{\mathbf{Q}} = P$$

c. **Penerimaan Marjinal** (*Marginal Revenue*, MR) adalah penerimaan tambahan yang diperoleh akibat bertambahnya penjualan satu unit barang. Secara matematik, fungsi penerimaan marjinal merupakan derivatif pertama dari fungsi penerimaan total (Total Revenue, TR) terhadap jumlah produksi.

$$MR = TR' = \frac{dTR}{dQ}$$

Contoh 1 :

Fungsi permintaan dinyataan dalam persamaan P = 20- 5Q. Tentukanlah persamaan penerimaan total dan marginal serta berapa titik ekstrim dari fungsi penerimaan totalnya ?

Jawab :

Fungsi permintaan : P = 20 - 5Q

Fungsi penerimaan : R = Q . P = Q (20 – 5Q)

$R = 20Q – 5Q^2$

Fungsi penerimaan marjinal : MR = R' = 20 - 10Q

R maksimum jika MR = 0 → 0 = 20 -10Q

Q = 2

Untuk Q = 2 → Harga : P = 20 – 5Q

P = 20 – 5(2) = 10

Penerimaan : $R = 20Q -5Q^2$

$R = 20(2) – 5(2)^2 = 20$

Jadi titik ekstrim fungsi penerimaan total berada pada koordinat (2,20)

Contoh 2 :

Harga jual barang P = -2Q + 16, tentukan berapa output yang harus diproduksi dan dijual agar diperoleh total pendapatan maksimum dan berapakah marginal pendapatan maksimum tersebut dari penjualan barang tersebut?

Jawab:

Fungsi harga (permintaan) : P = -2Q + 16

Fungsi total pendapatan : R = P . Q = (-2Q + 16) Q

$R = -2Q^2 + 16\ Q$

Pertama mencari turunan pertama fungsi total pendapatan, kemudian dibuat = 0

R' = -4Q + 16 = 0

-4Q = 16

Q = 4

Agar dijamin bahwa jika menjual sebanyak Q = 4 maka akan diperoleh total pendapatan maksimum, langkah kedua yaitu mencari turunan kedua fungsi total pendapatan : R'' = -4 < 0 sehingga diperoleh nilai maksimum

Jadi output yang harus diproduksi dan dijual agar diperoleh total pendapatan maksimum yaitu sebanyak 4, dimana :

Total pendapatan maksimumnya: $R = -2Q^2 = 16\ Q$

$R = -2(4)^2 - 16(4)$

R = 32

Jadi ketika menjual produk sebanyak 4, maka akan diperoleh total pendapatan maksimum sebesar 32.

Contoh 3 : Memaksimasi Marginal Pendapatan (marginal revenue)
Harga jual barang P = 8Q – 2/3 Q^2, tentukan berapa output yang harus diproduksi dan dijual agar diperoleh marginal pendapatan maksimum. Berapakah marginal pendapatan maksimum tersebut?

Jawab:
Fungsi permintaan: P = 8Q – 2/3 Q^2
Fungsi total pendapatan: R = P.Q = (8Q-2/3Q^2) Q = $8Q^2 - 2/3Q^2$
Fungsi marginal pendapatan: MR = 16Q – 2 Q^2
MR maksimum pada saat MR'= 0 : MR = 16-4Q = 0
16 = 4Q
Q = 4
Pembuktian MR maksimum : MR'' = -4 < 0
Jadi output yang harus diproduksi dan dijual agar diperoleh marginal pendapatan maksimum sebanyak 4.
Marginal pendapatan maksimumnya MR = 16 Q - 2Q^2
= 16 (4) – 2 $(4)^2$
= 48

4. Untilitas Marjinal

Utilitas Marjinal (Marginal Utility, MU) adalah utilitas tambahan yang diperoleh akibat satu unit tambahan barang yang dikonsumsi. Secara matematik, merupakan derivatif dari total utility.

$$\text{MU} = \text{TU} = \frac{\text{dTU}}{\text{dQ}}$$

Contoh :
Fungsi utilitas dinyatakan dalam persaman U = 15Q – 5Q^2. Tentukanlah persamaan utilitas marginal serta berapa titik ekstrim dari fungsi utilitas totalnya. Berapa utilitas marginal jika barang yang diproduksi ditambah dari 2 unit menjadi 3 unit ?

Jawab :
Fungsi utilitas : U = 15Q – 5Q^2
Utilitas marginal : MU = U' = 15 – 10Q
U maksimum jika MU = 0 → 0 = 15 – 10Q
Q = 1,5
Untuk Q = 1,5 → U = 15Q- 5Q^2
U = 15 (1,5) – 5$(1,5)^2$ = 11,25
Jika Q = 2 → MU = 15 – 10(2) = -5
Jika Q = 3 → MU = 15 – 10(3) = -15

Jadi , titik ekstrim fugsi utilitas total berada pada koordinat (1,5 ; 11,25). Pada saat konsumen mengkonsumsi 2 unit barang utilitas tambahan sudah menurun dan akan

semakin menurun jika ditambah 1 unit lagi, sehingga konsumen harus mengurangi konsumsi terhadap produk tersebut untuk meningkatkan kembali untilitas tambahannya.

5. Produk Marginal

Produk marginal adalah produk tambahan yang dihasilkan akibat bertambahnya satu unit faktor produksi yang digunakan. Fungsi produk marginal adalah turunan pertama dari fungsi produk total.

Jika fungsi produk total adalah P = f (x) , maka produk marginalnya :

$$MP = P' = \frac{dP}{dX}$$

Catatan :

Fungsi produk total yang non linier pada umumnya berbentuk fungsi kubik sehingga produk marginalnya akan berbentuk fungsi kuadrat yang titik ekstrim (maksimum)-nya tepat pada saat kurva produk total berada pada titik belok (kedudukan ini menunjukkan hukum penambahan hasil yang semakin berkurang ("the law of deminishing return")

Produk total mencapai puncaknya ketika produk marginalnya nol. Sesudah kedudukan ini, produk total menurun bersamaan produk marginal negatif (dibawah sumbu x). Produk marginal negatif menunjukkan penambahan penggunaan masukan yang bersangkutan justru akan mengurangi jumlah produk total (disefisiensi dalam kegiatan produksi). Jka produk total hendak ditingkatkan maka jumlah masukan yang digunakan harus dikurangi.

Contoh :

Diketahui fungsi produksi total $P = f(X) = 9X^2 - X^3$

Tentukan :

a. Fungsi produk marginalnya
b. Jumlah masukan pada saat produk total mencapai maksimum dan tentukan produksi maksimumnya!
c. Jumlah masukan pada saat produk marginal mencapai maksimum dan tentukan produk marginalnya!
d. Gambarkan grafiknya

Jawab :

Diketahui Produksi total $P = 9X^2 - X^3$

a. Produk marginalnya = MP = P' = $18X - 3X^2$

b. P mencapai maksimum pada saat P' = 0

$P' = 18X - 3X^2 = 0$

$X(18 - 3X) = 0$

$X = 0$ atau $18 - 3X = 0$

$3X = 18$

$X = 6$

Untuk X = 6 maka $P = 9(6)^2 - (6)^3 = 9(36) - 216 = 324 - 216 = 108$

Jadi pada saat jumlah masukan = 6 produksi total mencapai maksimum yaitu 108

c. MP mencapai maksimum pada saat MP' = 0

$MP = 18X - 3X^2$ maka $MP' = 18 - 6X = 0$

$6X = 18$

$X = 3$

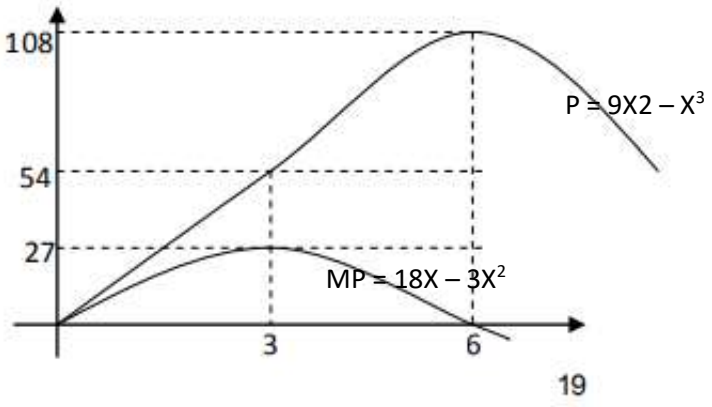
$MP = 18(3) - 3(3)^2$

$MP = 18(3) - 3(9)$

$MP = 54 - 27$

Jadi MP maksimum pada saat jumlah masukan = 3 dengan produk marginal = 27

d. Grafik



III. Analisis Keuntungan Maksimum

Tingkat produksi yang memberikan keuntungan maksimum dapat disidik dengan pendekatan diferensial. Karena baik penerimaan total (Revenue, R) maupun biaya (Cost) sama – sama merupakan fungsi jumlah keluaran (output) yang dihasilkan / terjual (Quantity), maka di sini dapat dibentuk suatu fungsi baru yitu fungsi keuntungan (π). Ada dua syarat agar diperoleh suatu keuntungan maksimum :

- $\pi' = 0$
- $\pi'' < 0$

Dimana : $\pi = R - C$

Contoh :

Diketahui : $R = -2Q^2 + 1000Q$

$C = Q^3 - 59Q^3 + 1315Q + 2000$

Ditanya : a. Berapa tingkat produksi yang menghasilkan keuntungan maksimum?

b. Berapa biaya yang dikeluarkan untuk menghasilkan keuntungan maksimum?

c. Berapa besarnya penerimaan pada saat perusahaan pada saat perusahaan mencapai keuntungan maksimum ?

d. Berapa hara jual perunit pada saat perusahaan mencapai keuntungan maksimum ?

e. Berapa besarnya keuntungan maksimum tersebut ?

Jawab :

a. $\pi = R\text{-}C = (-2Q^2 + 1000Q) - (Q^2 - 59Q^2 + 1315Q + 2000)$

$\pi = -Q^2 + 57Q^2 - 315Q - 2000$

$\pi = -3Q^2 + 114Q - 315$

Agar keuntungan maksimum : Syarat $\pi' = 0$

$$\pi' = -3Q2 + 114Q - 315 = 0$$

$$Q_{1.2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ ➡ (Rumus ABC)

Maka didapat Q1 = 3 dan Q2 = 35 (dengan rumus abc maupun dengan pemfaktoran)

Q1 = 3, $\rightarrow$ $\pi'' = -6Q + 114 = -6\,(3) + 114 = 96$

Q2 = 35,$\rightarrow$ $\pi'' = -6Q + 114 = -6\,(35) + 114 = -96$

Karena syarat ke 2 untuk Q =35 hasilnya < 0, maka tingkat produksi yang menghasilkan keuntungan maksimum adalah Q = 35 unit.

b. Biaya yang menghasilkan keuntungan maksimum:
   C = Q3 – 59Q2 + 1315Q + 2000
   C = 353 – 59.(352)+ 1315.(35) + 2000
   C = 18.625
c. Besarnya pendapatan:
   R = – 2Q2 + 1000Q
   R = – 2.(352)+ 1000.(35)
   R = 32.550
d. Harga jual per unit:
   R = P.Q, maka P = R/Q
   P = 32550/35 = 930/unit
e. Adapun besarnya keuntungan maksimum tersebut adalah:
   π = - (35)3 + 57 (35)2 – 315 (35) – 2000 = 13.925
   atau : $\pi = R - C$
   $\pi = 32.550 - 18.625 = 13.925$

IV. Penerimaan Pajak Maksimum

Misalkan fungsi permintaan suatu barang adalah P = c – dQ dan fungsi penawaran P = a + bQ. Jika pemerintah mengenakan pajak spesifik sebesar t atas setiap unit barang yang dijual, maka pajak per unit (t) dan total Pajak (T) dihitung dengan tahapan berikut :

1. Cari persamaan Penawaran sesudah pajak : P = a + bQ + t
2. Rubah dalam bentuk fungsi pajak spesifik per unit barang yaitu : t = P - a - bQ
3. Subtitusikan P dengan fungsi permintaan kedalam persamaan fungsi t ;
   t = (c – dQ) - a - bQ = (c - a) – (d + b) Q
4. Cari Persamaan pajak total/total pajak: T= t.Q = (c - a) Q – (d+b) Q2
5. Cari berapa jumlah unit barang (Q) pada kondisi pemerintah akan memperoleh penerimaan maksimum (Tmax) dengan syarat T' = 0.
   T maksimum jika T' =0 , yakni pada Q = (c - a) / 2 (d+b)
6. Hitung berapa Tmax (penerimaan total pajak maksimum pemerintah)

Atau :

P = a + bQ + t (penawaran sesudah pajak)
t = P – a - Bq (fungsi pajak spesifik per unit barang)
P = c – dQ (fungsi permintaan akan barang)
t = c – dQ – a – Bq = (c-a) – (d+b)Q
$T = t.Q = (c-a)Q – (d+b)Q^2$ (Pajak total)
T maksimum , jika T' = 0
Pajak Total Pemerintah: T = t.Q
= [(c-a)-(d+b)Q]. Q
$T = (c-a)Q – (d+b)Q^2$

T maksimum jika T' = 0, → T'= (c - a) – 2(d+b)Q
0 = (c - a) – 2(d+b)Q
2(d+b)Q = (c - a)

$$Q = \frac{(c-a)}{2\,(d+b)}$$

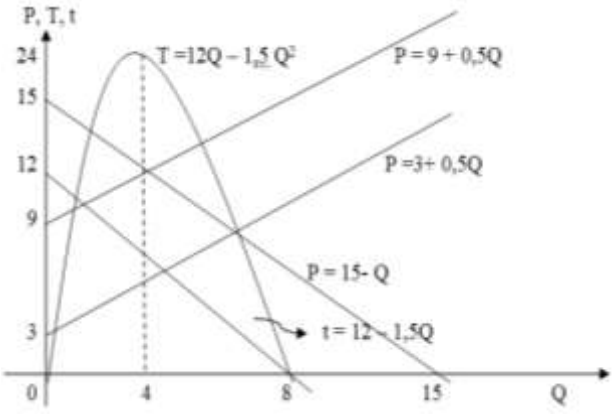
Contoh :

Permintaan akan suatu barang ditunjukkan oleh persamaan P= 15 – Q dan penawarannya P= 3 + 0,5Q. Pemerintah berencana mengenakan pajak spesifik sebesar t atas setiap unit barang yang dijual. Jika penerimaan pajak atas barang ini diinginkan maksimum:
a. Berapa besarnya pajak perunit yang harus ditetapkan?
b. Berapa besarnya penerimaan pajak maksimum tersebut?

Jawab :

Fungsi penawaran sesudah pajak : P= 3 + 0,5Q + t

- Pajak per unit barang : t = P – 3 – 0,5Q
- Fungsi permintaan : P = 15 – Q disubtitusikan
  Maka : t = (15 – Q) – 3 – 0,5Q
  = 15 – 3 – Q – 0,5Q
  t = 12 – 1,5Q
- Pajak Total : T = t.Q
  T= (12 – 1,5Q). Q
  $T= 12Q – 1,5Q^2$



T maksimum jika T'= 0

$T= 12Q – 1,5Q^2$ maka : T' = 12 – 3Q = 0
3Q = 12
Q = 4

a) Maka pajak perunit barang : t = 12 – 1,5Q = 12 – 1,5(4) = 6
b) Maka pajak total diterima pemerintah : T = t.Q = 6(4) = 24
Penawaran sesudah pajak : P = 3 + 0,5Q + t
P = 3 + 0,5.(4)+ (6) → P = 11

Persamaan penawaran sesudah pajak : $P = 3 + 0{,}5Q + 6$

$P = 9 + 0{,}5Q$

Harga keseimbangan di pasar adalah : $P = 3 + 0{,}5(4) + 6 = 11$.

Jadi pajak maksimum T maks = 24 jika pajak per unit barang t = 6

V. Efek Pemajakan bagi Penunggal

Pajak, di samping merupakan sumber penting pendapat negara, dapat pula fungsi sebagai instrumen kendali atas keuntungan ”berlebihan” yang dapat dikeduk oleh penunggal (monopolist). Pengenaan pajak sebesar **t** per unit barang yang diproduksi atau dijual oleh penunggal akan mengakibatkan :

- Biaya rata-rata menjadi meningkat sebesar t
- Biaya total meningkat sebesar t.Q
- Harga menjadi mahal
- Keuntungan yang diperoleh monopolist menjadi berkurang

Pajak perunit : t

Pajak total : $T = t.Q = f(t,Q)$

Penerimaan total : $R = r(Q)$

Biaya total : $C = c(Q)$

Keuntungan : $\pi = R - C$

$\pi = r(Q) - c(Q)$

Biaya total sesudah pengenaan pajak : $C_t = c(Q) + tQ$

Keuntungan sesudah pengenaan pajak : $\pi_t = r(Q) - c(Q) - tQ$

Contoh 1 :

Andaikan fungsi permintaan seorang penunggal (monopolist) $P = 1000 - 2Q$ dan fungsi biaya totalnya $C = 2000 + 1315\,Q - 59\,Q^2 + Q^3$. Pemerintah memungut pajak sebesar 405 atas setiap unit barang yang diproduksi/dijual. Bandingkan keuntungan maksimum yang diperoleh penunggal ini antara tanpa dan dengan pengenaan pajak! Berapa pajak total yang diterima pemerintah?

Jawab ;

Tanpa pengenaan pajak :

Fungsi penerimaan : $R = P.Q = 1000\,Q - 2\,Q^2$

Fungsi Biaya : $C = 2000 + 1315\,Q - 59\,Q^2 + Q^3$

Fungsi Keuntungan : $\pi = R - C$

$= (1000\,Q - 2\,Q^2) - (2000 + 1315\,Q - 59\,Q^2 + Q^3)$

$= -\,Q^3 + 57\,Q^2 - 315Q - 2000$

π maksimum pada saat $\pi' = 0 \rightarrow \pi' = -3\,Q^2 + 114Q - 315 = 0$: -3

$Q^2 - 38Q + 105 = 0$

$(Q - 3)(Q - 35) = 0$,maka

$Q_1 = 3$, $Q_2 = 35$

Perhitungan selanjutnya yang digunakan $Q = 35$ karena $\pi'' = -6(35) + 114 = -96 < 0$

Keuntungan maksimum : $\pi_{max} = -Q^3 + 57Q^2 - 315Q - 2000$

$= -(35)^3 + 57(35)^2 - 315(35) - 2000 = 13.925$

Harga : $P_e = 1000 - 2(35) = 930$

Dengan pengenaan pajak :

Biaya total setelah pajak : $\mathbf{C = c(Q) + tQ} = 2000 + 1315\,Q - 59\,Q^2 + Q^3 + 405\,Q$

$= Q^3 - 59\,Q^2 + 1720Q + 2000$

Fungsi keuntungan yang baru : $\boldsymbol{\pi_t = R - C_t}$

$= (1000\,Q - 2\,Q^2) - (Q^3 - 59\,Q^2 + 1720Q + 2000)$

$= -Q^3 + 57\,Q^2 - 720\,Q - 2000$

$\pi' = -3\,Q^2 + 114\,Q - 720$

$\pi'' = -6\,Q + 114$

π maksimum jika $\pi' = 0$ dan $\pi'' < 0$

$\pi' = 0 \quad \rightarrow \quad -3\,Q^2 + 114\,Q - 720 = 0 \;:\, -3$

$Q^2 - 38\,Q + 240 = 0$

$(Q - 8)(Q - 30) = 0$, maka

$Q_1 = 8$, $Q_2 = 30$

Jika $Q = 8 \quad \rightarrow \quad \pi'' = 66$

Jika $Q = 30 \quad \rightarrow \quad \pi'' = -66 < 0$ (memenuhi syarat π maksimum)

Jadi $Q = 30 \quad \rightarrow \quad \pi_{maksimum} = -2000 - 720(30) + 57(30)^2 - (30)^3 = 4.700$

$P_e = 1000 - 2(30) = 940$

Pajak total yang diterima pemerintah : $T = t.Q = 405\,(30) = 12.150$

[Jika dianalisis, dari jumlah 12.150 ini, sebesar TK = (940-930) x 30 = 300 merupakan beban pajak total yang ditanggung oleh pihak konsumen, selebihnya TP = 12.150 – 300 = 11.850 ditanggung oleh produsen (si penunggal). Hal ini mencerminkan kebijakan pajak cukup efektif untuk mengendalikan keuntungan produsen monopolis]

Contoh 2 :

Andaikan seorang produsen monopolis menghadapi fungsi permintaan $Q = 100 - 5P$ dan biaya totalnya $C = 20 - 4Q + 0{,}1\,Q^2$. Pemerintah mengenakan pajak atas setiap unti barang yang dijual oleh penunggal dan menginginkan pajak total yang diterimanya maksimum. Di lain pihak, walaupun barang dagangannya dipajaki, produsen tetap menginginkan operasi bisnisnya menghasilkan keuntungan maksimum. Berapa pajak per unit yang harus ditetapkan oleh pemerintah agar penerimaan pajaknya dan juga keuntungan produsen maksimum? Hitunglah masing-masing penerimaan pajak maksimum dan keuntungan maksimum tersebut.

Jawab ;

Permintaan : $Q = 100 - 5P \quad \rightarrow \quad P = 20 - 0{,}2\,Q$

Penerimaan : $R = P.Q = 20 - 0{,}2\,Q)\,Q = 20\,Q - 0{,}2\,Q^2$

Biaya total setelah pajak : $C = 20 - 4Q + 0{,}1\,Q^2 + tQ$ (t melambangkan pajak per unit)

Keuntungan : $\pi = R - C = (20\ Q - 0{,}2\ Q^{2)}) - (20 - 4Q + 0{,}1Q^2 + tQ)$

$= -\ 0{,}3\ Q^2 + 24\ Q - tQ - 20$

$\pi' = -\ 0{,}6\ Q + 24 - t$

π maksimum jika $\pi' = 0 \rightarrow -0{,}6\ Q + 24 - t = 0 \rightarrow Q = (24 - t)/0{,}6$

$T = t.Q = t(24 - t)/0{,}6 = (24\ t - t^2)/0{,}6$

$T' = dT/dt = (24 - 2t)/0{,}6$

T maksimum bila $T' = 0 \rightarrow (24 - 2t)/0{,}6 = 0 \rightarrow 24 - 2t = 0 \rightarrow t = 12$

Jadi T maksimum bila t = 12 [bukti : $T'' = (-\ 2/\ 0{,}6) < 0$]

π maksimum jika $Q = (24 - t)/0{,}6 = (24 - 12)/0{,}6 = 20$

Adapun besarnya $T_{\text{maksimum}} = t.Q = 12(20) = 240$

Sedangkan $\pi_{\text{maksimum}} = -\ 0{,}3(20)^2 + 24(20) - 12(20) - 20 = 100$

Soal-Soal Latihan :

1. Diketahui fungsi penawaran suatu produk : $P = 2Q + 6$ dan fungsi permintaan $P = -\ 2Q^2 - 2Q + 54$
   Ditanya : a. Elastisitas fungsi penawaran jika P = 10 ?
   b. Elastisitas fungsi permintaan jika Q = 5 ?
   c. Elastisitas pada kondisi keseimbangan pasar ?
2. Tentukan nilai Q pada persamaan $P = 54 - 2Q^2$ agar memiliki unitary elastisitas?
3. Tentukan nilai TC min dari fungsi $TC = \dfrac{3Q^2}{Q - 2}$!
4. Diketahui fungsi permintaan P = 350 - 0,5 Q. Berapa penerimaan minimum ?
5. Diketahui fungsi biaya TC = 0,01 Q2 + 5Q + 16.
   Carilah nilai AVCmin dan ACmin !
   1. Pada suatu perusahaan diketahui fungsi permintaan P = 520 – 2Q dan fungsi biaya rata-rata AC = Q + 160 + 2000/Q . Carilah tingkat laba maksimum !
   2. Seorang monopolis menghadapi fungsi permintaan Q = 100 - 5P dan fungsi biaya total $TC = 20 - 4Q + 0{,}1Q^2$. Ditanya :

   a. Jumlah produksi pada saat TRmaksimum dan berapa TRmaksimumnya ?
   b. Jumlah produksi pada saat TCminimum dan berapa besar TCminimum ?
   c. Jumlah produksi agar keuntungan maksimum dan berapa besar keuntungan maksimum ?
   d. Jika pemerintah memungut pajak sebesar Rp 6 setiap unit, berapa jumlah yang diproduksi? Berapa keuntungan maksimum yang diperoleh monopolis, berapa pajak total yang diterima pemerintah, berapa beban pajak yang ditanggung konsumen dan produsen !
   e. Jika pemerintah ingin menetapkan pajak, berapa pajak per unit yang harus ditetapkan oleh pemerintah agar penerimaan pajaknya dan keuntungan produsen maksimum dan hitung masing-masing penerimaan pajak maksimum dan keuntungan maksimum tersebut !

BAB VIII
DIFERENSIAL FUNGSI MAJEMUK (MULTIVARIABEL)

I. Diferensial Parsial

Diferensiasi fungsi majemuk disebut juga **diferensiasi parsial** yaitu proses menurunkan suatu fungsi bagian perbagian berdasarkan jumlah variabel bebasnya. Jika sebuah fungsi mempunyai n macam variabel bebas maka ia akan memiliki n macam turunan.

Jika y = f(x,z) maka akan terdapat dua macam turunan, yaitu turunan y terhadap x atau ∂ y/∂ x dan turunan y terhadap z atau ∂ y/∂ z ("∂" dibaca "dho", hanya pada diferennsial parsial). Sesungguhnya ∂ y/ ∂ x dari y = $f(x,z)$ adalah turunan dari $f(x.z)$ terhadap x dengan anggapan hal–hal lain tetap atau konstan (dalam ekonomi dikenal dengan sebutan asumsi *ceteris paribus*). Oleh karena itu dalam menurunkan y = f (x,z) terhadap x hanya suku–suku yang mengandung variabel x saja yang diturunkan.

Jika y = (x1, x2, x3, … , xn) maka persamaan fungsi turunan pertama dan seterusnya akan berjumlah $\mathbf{n^k}$ (n = jumlah variabel bebas dan k = turunan ke berapa yang akan dicari, tergantung jumlah pangkat tertinggi variabel bebasnya).Yaitu diferensial yang dilakukan terhadap fungsi yang mengandung lebih dari satu variabel.

Misalkan fungsinya : $y = f(x_1, x_2 \dots\dots, x_n)$, di mana $x_1, \dots\dots x_n$ merupakan variabel;

maka turunan pertamanya: $\partial dy/\partial x_1 = \dots\dots, \frac{\partial y}{\partial x_2} = \dots\dots, \dots\dots, \partial y/\partial x_{n=} \dots\dots$

Contoh:

1. Untuk fungsi yang mengandung 2 variabel : y = f (x_1, x_2)

   Y = $3x_{1^2} - 2x_1x_2 + 4x_{2^2}$

   Maka turunan pertama :

   $Y_1 = \frac{\partial Y}{\partial x_1} = 6x_1 - 2x_2$, $\quad Y_2 = \frac{\partial Y}{\partial x_2} = -2x_1 + 8x_2$

   Maka turunan kedua :

   $Y_{11} = \frac{\partial^2 Y}{(\partial x_1)^2} = 6$

   $Y_{12} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x_2 \partial x_1} = -2$

   $Y_{21} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x_2 \partial x_1} = -2$

   $Y_{22} = \frac{\partial^2 Y}{(\partial x_2)^2} = 8$

II. Derivatif dari Derivatif Parsial

Sampai saat ini yang dibahas hanya derivative fungsi satu variabel. Telah disebutkan bahwa yang lebih realistis, fungsi variabel ekonomi umumnya memiliki banyak I*ndependent variable.* Misalnya, dalam memproduksi ketela, y, agar menjadi lebih realistis inpuit yang dilibatkan tidak hanya petani, x, tetapi juga lahan, w, sehingga bentuk fungsinya :

$$y = f(x,w)$$

kemudian jika ditanyakan bagaimana pengaruhnya terhadap jumlah produk ketela jika ada sedikit perubahan jumlah petani saja, sementara luas lahan tidak berubah? Pertanyaan itu dapat dijelaskan dengan konsep *derivative parsial* yang mengukur tingkat perubahan *dependent variabel* dalam menanggapi perubahan salah satu *independent variable*nya, jika *independent variable* yang lain dianggap konstan.
Misalkan w = k, di mana k suatu konstan, maka y = f(x,k). kemudian pertanyaan di atas dapat dituliskan sebagai :

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x+\Delta x,k)-f(x,k)}{(x-\Delta x)-x}$$

Bentuk penulisan ini dinamakan *derivative parsial pertama y terhadap x*. ada banyak versi symbol untuk itu, seperti : $\frac{\partial y}{\partial x}$, f_x , atau y_x , di sini digunkan huruf ∂ (dibaca dho) sebagai pengganti d. dimaksudkan untuk menunjukan bahwa *independent variable* lain (selain x) fungsi itu dianggap konstan. Cara memperoleh derivative parsial mengikuti aturan-aturan derivasi seperti fungsi dengan satu variabel bebas.

Contoh :
$y = f(x,w) = x^2 + 4xw + 3w^2$
Fungsi ini mempunyai dua derivative parsial pertama yaitu :

1. $\frac{\partial y}{\partial x} = f_x = 2x + 4w$ dan 2. $\frac{\partial y}{\partial w} = f_w = 4x + 6w$

Seperti halnya fungsi primitive, derivative parsial itu juga merupakan fungsi dari x dan w, sehingga untuk x=1 dan w=3, maka

$$f_x(1,3) = 2 + 4(3) = 14 \quad \text{dan} \quad f_w(1,3) = 4(1) + 6(3) = 22$$

Derivative parsial lebih tinggi juga diperoleh dengan cara yang sama seperti dalam mencari derivative lebih tinggi fungsi satu variabel. Untuk contoh yang sedang dipelajari, terdapat empat macam derivative parsial kedua, yaitu :

1a. $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f_{xx} = 2$
2a. $\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial w \partial x} = f_{xw} = 4$
1b. $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial w}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial w} = f_{wx} = 4$
2b. $\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial y}{\partial w}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial w^2} = f_{ww} = 6$

Perhatikan bahwa symbol $f_{xw} = \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$ dimaksudkan bahwa fungsi diderivasi terhadap x kemudian terhadap w. jadi subscript pada f_{xw} dibaca dari kiri ke kanan. Derivatif seperti itu dinamakan *derivative parsial silang.* Contoh derivative parsial silang lainnya adalah f_{wx}. Mengikuti **Teori Young**, derivative parsial silang akan sama satu dengan yang lainnya, dengan syarat selama keduanya kontinu.
Jadi : $f_{xw} = f_{wx}$

Adalah juga benar bahwa :

$$f_{xww} = f_{wxw} = f_{wwx}$$

Jika suatu fungsi memiliki tiga independent variabel, y = g(x_1, x_2, x_3) maka $g_{12} = g_{21}$ $g_{13} = g_{31}$, $g_{23} = g_{32}$ dan seterusnya, dengan syarat semua derivative parsial silang ini kontinu.

III. Optimasi (Nilai Ekstrim Maksimum atau Minimum)

Nilai–nilai ekstrim (optimum) dari sebuah fungsi yang mengandung lebih dari satu bebas dapat dicari dengan pengujian sampai derivatif keduanya :

Untuk $\mathbf{y = f(x,z)}$,
Maka y akan mencapai titik ekstrimnya jika :

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0} \qquad \text{dan} \qquad \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{z}} = \mathbf{0}$$

Syarat di atas adalah syarat yang diperlukan (necessary condition) agar fungsinya mencapai mancapai titik ekstrim.
Syarat diatas adalah syarat yang diperlukan agar fungsinya mencapai titik Ekstrim. Guna mengetahui apakah titik Ekstrim itu berupa titik maksimium ataukah titk minimum, dibutuhkan syarat yang mencukupkan, yakni :

Maksimum bila $\frac{\delta^2 y}{\partial x^2} < 0$ **dan** $\frac{\delta^2 y}{\partial z^2} < 0$

Minimum bila $\frac{\delta^2 y}{\partial x^2} > 0$ **dan** $\frac{\delta^2 y}{\partial z^2} < 0$

Dalam masalah optimasi, ada dua pertanyaan yang senantiasa diajukan.
Misalkan untuk fungsi dengan satu variabel *y = f(x)*,permasalahannya :

i. Berapakah *x* yang akan memberikan *y* optimum? Jika itu telah terjawab, maka pertanyaan selanjutnya baru bias di jawab, yaitu :
ii. Berapa y yang optimum tersebut?
Untulk menjawab pertanyaan yang pertama, langkah-langkah yang dijelaskan di bawah ini untuk fungsi yang mengandung satu variabel *y = f(x)*

	Maksimum	Minimum	
Langkah I	Y' = 0	Y' = 0	Diperoleh titik x
Langkah II	Y'' < 0	Y'' >0	Menentukan nilai optimum (maksimum atau minimum)

Contoh :

Selidiki titik ekstrim dari fungsi $y = -x^2 + 12x - z^2 + 10z - 45$ apakah titik maksimum atau titik minimum?

Jawab :

$Fx = \partial y/\partial x = -2x + 12 = 0$ $\qquad$ $Fz = \partial y/\partial z = -2z + 10 = 0$

$-2x + 12 = 0$ $\qquad$ $-2z + 10 = 0$

$-2x = 12$ maka $x = 6$ $\qquad$ $-2z = -10$ maka $z = 5$

$y = -6^2 + 12(6) - 5^2 + 10(5) - 45 = 16$

$Fxx = \frac{\delta^2 y}{\partial x^2} = -2 < 0$ dan $Fzz = \frac{\delta^2 y}{\partial z^2} = -2 < 0$, → maka titik ekstrimnya maksimum dengan y max = 16

IV. Optimasi Bersyarat

Dalam kenyataan seringkali kita harus mengekstrimkan atau mengoptimumkan suatu fungsi, yaitu mencari nilai maksimum atau minimumnya, tetapi terkekang oleh suatu fungsi lain yang harus dipenuhi atau fungsi yang hendak dioptimumkan tadi menghadapi suatu kendala (constraint).

Pengganda Lagrange (λ)

Penghitungan nilai ekstrim sebuah fungsi yang menghadapi kendala berupa sebuah fungsi lain dapat diselesaikan dengan Metode Lagrange, dengan membentuk fungsi baru yaitu fungsi Lagrange menggunakan pengganda Lagrange **λ**.

Fungsi lagrange merupakan penjumlahan dari fungsi yang hendak dioptimumkan ditambah hasil kali pengganda lagrange λ dengan fungsi kendalanya.

Pengganda Lagrange λ adalah suatu variabel tak-tentu yang hanya bersifat sebagai variabel pembantu mempermudah perhitungan. Dalam membentuk fungsi baru Lagrange, fungsi yang menjadi kendala harus diimplisitkan dulu (dibuat sama dengan nol).

Caranya :

Misalkan hendak dioptimumkan $z = f(x, y)$ → Fungsi Tujuan

Dengan syarat harus terpenuhi $u = g(x, y)$ → Fungsi Kendala

Maka fungsi Lagrangenya : $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\, g(x, y)$

Nilai ekstrim F (x , y , λ) dapat dicari dengan memformulasikan masing-masing derivative-parsial pertamanya sama dengan nol → F optimum pada saat F' = 0

$$\begin{aligned} F_x\ (x, y, \lambda) &= f_x + \lambda g_x = 0 \\ F_y\ (x, y, \lambda) &= f_y + \lambda g_y = 0 \end{aligned} \rightarrow$$

→ Syarat yang diperlukan
(necessary condition)

Guna mengetahui jenis nilai titik ekstrim, apakah titik maksimum ataukah titik minimum, dibutuhkan syarat yang mencukupkan (***sufficient condition***) dengan menyelidiki derivative-parsial keduanya.

Maksimum bila $F_{xx} < 0$ dan $F_{yy} < 0$

Minimum bila $F_{xx} > 0$ dan $F_{yy} > 0$

Contoh :

Tentukan nilai ekstrim dari fungsi $z = 2x + 2y$ dengan syarat $x^2 + y^2 = 8$. Jelaskan nilai ekstrimnya!.

Jawab :

Fungsi tujuan : $z = 2x + 2y$ (akan dioptimumkan)

Fungsi syarat/kendala : $x^2 + y^2 = 8 \rightarrow x^2 + y^2 - 8 = 0$

Fungsi Lagrange : $F = 2x + 2y + \lambda (x^2 + y^2 - 8)$

$= 2x + 2y + \lambda x^2 + \lambda y^2 - 8\lambda$

Agar F ekstrim / optimum → F' = 0

(1) $F_x = 2 + 2\lambda x = 0 \rightarrow \lambda = -1/x$

(2) $F_y = 2 + 2\lambda y = 0 \rightarrow \lambda = -1/y$

⇨ Berdasarkan (1) dan (2) :
$\lambda 1 = \lambda 2 \rightarrow -1/x = -1/y$ atau $y = x$

Menurut fungsi kendala : $x^2 + y^2 = 8$

Karena $y = x$, maka : $x^2 + x^2 = 8$

$2x^2 = 8$, $x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 = y$

Karena $y = x$ maka $x = \pm 2$ dan $y = \pm 2$

* Untuk $x = 2$ dan $y = 2 \rightarrow z = 2x + 2y = 2(2) + 2(2) = 8$

$\lambda 1 = \lambda 2 = -1/x = -1/y = -1/2$

$F_{xx} = 2\lambda = 2(-1/2) = -1 < 0$

$F_{yy} = 2\lambda = 2(-1/2) = -1 < 0$

Karena $F_{xx} < 0$ dan $F_{yy} < 0$, maka nilai ekstrimnya maksimum dengan $z_{maks} = 8$

* Untuk $x = -2$ dan $y = -2 \rightarrow z = 2x + 2y = 2(-2) + 2(-2) = -8$

$\lambda 1 = \lambda 2 = -1/x = -1/y = -1/(-2) = 1/2$

$F_{xx} = 2\lambda = 2(1/2) = 1 > 0$

$F_{yy} = 2\lambda = 2(1/2) = 1 > 0$

Karena $F_{xx} > 0$ dan $F_{yy} > 0$, maka nilai ekstrimnya minimum dengan $z_{min} = -8$

Kondisi Kuhn – Tucker

Metode Kuhn–Tucker merupakan pengembangan lebih lanjut dari model optimisasi bersyarat. Jika dalam metode pengganda Lagrange kita mengoptimumkan sebuah fungsi terhadap kendala yang berbentuk persamaan, maka dalam metode Kuhn-Tucker kita mengoptimumkan sebuah fungsi terhadap sebuah fungsi yang berbentuk pertindaksamaan.

Latihan Soal :

1. Hitunglah p optimal dari fungsi berikut :
   1) $p = -q^2 – 3r^2 + 6q + 24r -50$
   2) $p = 3q^2 – 18q + r^2 – 8r + 50$

   dan selidiki apakah nilai p optimal tersebut nilai maksimum ataukah nilai minimum.
2. Tentukan nilai ektrim dari fungsi $f(r,s) = r^2 – 10s^2$ terhadap $r – s = 18$ serta jelaskan jenis nilai ekstrimnya !
3.

BAB IX
APLIKASI DIVERENSIASI MULTIVARIABEL DALAM EKONOMI

I. Permintaan Marjinal dan Elastisitas Permintaan Parsial

A. Permintaan Marginal (Marginal Demand)

Jika permintaan akan 2 jenis barang X dan Y terhadap harga satuannya p dan q dan kedua barang tersebut mempunyai hubungan penggunaanya maka fungsi permintaan dapat dinyatakan sebagai:

$\mathbf{Q_{da} = f\,(P_a, P_b)}$ dan $\mathbf{Q_{db} = f\,(P_a, P_b)}$

Derivatif, pertama dari Q_{da} dan Q_{db} adalah fungsi-fungsi permintaan marjinalnya, dimana:

$\frac{\partial\, Qda}{\partial\, Pa}$ adalah permintaan marjinal akan A berkenan dengan P_a

$\frac{\partial\, Qda}{\partial\, Pb}$ adalah permintaan marjinal akan A berkenan dengan P_b

$\frac{\partial\, Qdb}{\partial\, Pa}$ adalah permintaan marjinal akan B berkenan dengan P_a

$\frac{\partial\, Qdb}{\partial\, Pb}$ adalah permintaan marjinal akan B berkenan dengan P_b

B. Elastisitas Permintaan Parsial

Dengan dapat diturunkannya fungsi permintaan marjinal tersebut, dapatlah dihitung elastisitas permintaan parsialnya. Ada 2 macam elastisitas permintaan, yaitu:

1. **Elastisitas harga permintaan :** Elastisitas yang mengukur kepekaan perubahan permintaan suatu barang berkenaan perubahan harga sendiri .
2. **Elastisitas silang permintaan** Elatisitas yang mengukur kepekaan perubahan permintaan suatu barang berkenaan perubahan harga barang lain .

RUMUS ELASTISITAS PARSIAL

$$\eta_{da} = \frac{\%\,\Delta\, Qda}{\%\,\Delta\, Pa} = \frac{E\, Qda}{E\, Pa} = \frac{\partial\, Qda}{\partial\, Pa} \cdot \frac{Pa}{Qda}$$

$$\eta_{db} = \frac{\%\,\Delta\, Qdb}{\%\,\Delta\, Pb} = \frac{E\, Qdb}{E\, Pb} = \frac{\partial\, Qdb}{\partial\, Pb} \cdot \frac{Pb}{Qdb}$$

$$\eta_{ab} = \frac{\%\,\Delta\, Qda}{\%\,\Delta\, Pb} = \frac{E\, Qda}{E\, Pb} = \frac{\partial\, Qda}{\partial\, Pb} \cdot \frac{Pb}{Qda}$$

$$\eta_{ba} = \frac{\%\,\Delta\, Qdb}{\%\,\Delta\, Pa} = \frac{E\, Qdb}{E\, Pa} = \frac{\partial\, Qdb}{\partial\, Pa} \cdot \frac{Pa}{Qdb}$$

$\boldsymbol{\eta_{da}}$ dan $\boldsymbol{\eta_{db}}$ = elatisitas harga permintaan

$\boldsymbol{\eta_{ab}}$ dan $\boldsymbol{\eta_{ba}}$ = elatisitas silang permintaan

Ketentuan :

1. Jika $\boldsymbol{\eta_{ab}}$ dan $\boldsymbol{\eta_{ba}}$ keduanya negatif ($\boldsymbol{\eta_{ab} < 0}$ dan $\boldsymbol{\eta_{ba} < 0}$) untuk P_a dan P_b tertentu, berarti hubungan antara barang A dan B adalah **komplementer** (saling melengkapi), sebab penurunan salah satu barang akan diikuti oleh kenaikan permintaan atas barang tersebut dan *kenaikan* permintaan atas barang lainnya
2. Jika $\boldsymbol{\eta_{ab}}$ dan $\boldsymbol{\eta_{ba}}$ keduanya positif ($\boldsymbol{\eta_{ab} > 0}$ dan $\boldsymbol{\eta_{ba} > 0}$) untuk P_a dan P_b tertentu, berarti hubungan antara barang A dan B adalah **kompetitif** atau **substitusi** (saling menggantikan), sebab penurunan salah satu barang akan diikuti oleh kenaikan permintaan atas barang tersebut dan *penurunan* permintaan atas barang lainnya.
3. Jika $\boldsymbol{\eta_{ab}} < 0$ dan $\boldsymbol{\eta_{ba}} > 0$ atau $\boldsymbol{\eta_{ab} > 0}$ dan $\boldsymbol{\eta_{ba} < 0}$ untuk P_a dan P_b tertentu, berarti hubungan antara barang A dan B adalah bisa **komplementer** atau **kompetitif** atau **substitusi** (saling menggantikan) atau tidak bisa ditentukan.

Contoh 1:

Fungsi permintaan barang A dan B ditunjukkan oleh persamaan $Q_{da} . P_a^2.P_b^3 - 1 = 0$ dan $Q_{db} . P_a^3.Pb - 1 = 0$. Berapa elastisitas permintaan masing-masing barang dan bagaimana hubungan antara kedua barang tersebut?

Jawab:

Fungsi permintaan barang A

$$Q_{da} . P_a^2. P_b^3 - 1 = 0$$

$$Q_{da} = \frac{1}{P_a^2.P_b^3}$$

$$Q_{da} = P_a^{-2}. P_b^{-3}$$

$$\frac{\partial Qda}{\partial Pa} = -2P_a^{-3}. P_b^{-3}$$

$$\frac{\partial Qda}{\partial Pb} = -3P_a^{-2}. P_b^{-4}$$

Fungsi permintaan barang B

$$Q_{db} . P_a^3 .P_b - 1 = 0$$

$$Q_{db} = \frac{1}{P_a^3 .Pb}$$

$$Q_{db} = P_a^{-3}. P_b^{-1}$$

$$\frac{\partial Qdb}{\partial Pb} = - P_a^{-3}. P_b^{-2}$$

$$\frac{\partial Qdb}{\partial Pa} = -3P_a^{-4}. P_b^{-1}$$

$$\eta_{da} = \frac{\partial Qda}{\partial Pa} . \frac{Pa}{Qda} = -2P_a^{-3}. P_b^{-3} . \frac{Pa}{P_a^{-2}.P_b^{-3}} = -2$$

$$\eta_{db} = \frac{\partial Qdb}{\partial Pb} . \frac{Pb}{Qdb} = - P_a^{-3}. P_b^{-2} . \frac{Pb}{P_a^{-3}.P_b^{-1}} = -1$$

$$\eta_{ab} = \frac{\partial Qda}{\partial Pb} . \frac{Pb}{Qda} = -3P_a^{-2}. P_b^{-4} . \frac{Pb}{P_a^{-2}.P_b^{-3}} = -3$$

$$\eta_{ba} = \frac{\partial Qdb}{\partial Pa} . \frac{Pa}{Qdb} = -3P_a^{-4}. P_b^{-1} . \frac{Pa}{P_a^{-3}.P_b^{-1}} = -3$$

Barang A adalah barang **elastis** karena $\eta_{da} > 1$, barang B adalah barang ***unitary-elastic*** karena $\eta_{db} = 1$. (Ingat dalam menafsirkan elastisitas harga permintaan cukup dengan melihat besarnya angka perhitungan. Tandanya tidak perlu diperhitungkan).

Hubungan antara A dan B adalah bersifat **komplementer** karena $\eta_{ab} < 0$ dan $\eta_{ba} < 0$.

Contoh:

1. Jika fungsi permintaan dari 2 barang yang saling berhubungan adalah:

$$X = \frac{Q}{P}\ ; Y = \frac{P^2}{Q}$$

Tentukan

a. Permintaan marginalnya
b. Bagaimana hubungan antara kedua barang tersebut

Jawab:

Fungsi marginal

$$\frac{\delta X}{\delta P} = \frac{Q}{p^2}; \frac{\delta Y}{\delta P} = \frac{2P}{Q}$$
$$\frac{\delta X}{\delta Q} = \frac{1}{P}; \frac{\delta Y}{\delta Q} = \frac{P^2}{Q^2}$$

Untuk $\frac{\delta X}{\delta Q} > 0$ dan $\frac{\delta Y}{\delta P} > 0$ maka hubungan kedua barang tersebut bersifat kompetitif (bersaing).

II. Perusahaan Dengan 2 Macam Produk dan Biaya Produksi Gabungan

Apabila sebuah perusahaan menghasilkan dua macam output, dan biaya yang dikeluarkannya untuk memproduksi kedua macam produk itu merupakan biaya gabungan (*joint production cost*), maka keuntungan yang diperolehnya dapat diselesaikan dengan pendekatan deferensiasi parsial. Metode ini juga digunakan untuk menganilisis kasus perusahaan yang menghasilkan lebih dari dua macam produk yang biaya produksinya juga merupakan biaya produksi gabungan.

Andaikan perusahaan memproduksi dua macam barang A dan B, dimana fungsi permintaannya akan masing-masing barang dicerminkan oleh Q_a dan Q_b, serta biaya produksinya $C = f(Q_a, Q_d)$ maka:

Penerimaan dari memproduksi A : $R_a = Q_a . P_a = f(Q_a)$
Penerimaan dari memproduksi B : $R_b = Q_b . P_b = f(Q_b)$
Penerimaan total : $R = R_a + R_b = f(Q_a) + f(Q_b)$
Biaya Total : $C = f(Q_a, Q_b)$
Fungsi Keuntungannya: $\boldsymbol{\pi} = R - C$
$= f(Q_a) + f(Q_b) - f(Q_a, Q_b)$
$= g(Q_a, Q_b)$

$\boldsymbol{\pi}$ maksimum bila $\boldsymbol{\pi}$ ' = 0

$\pi Q_a = \frac{\partial \pi}{\partial Qa} = 0$ ..... persamaan 1

$\pi Q_b = \frac{\partial \pi}{\partial Qb} = 0$ ..... persamaan 2

Dari persamaan (1) dan (2) dapat diselesaikan dengan cara eliminasi atau subtitusi sehingga diperoleh nilai Q_a dan Q_b . Selanjutnya nilai π bisa dihitung.

Contoh :

Biaya total yang dikeluarkan sebuah perusahaan yang memproduksi dua macam barang, A dan B, ditunjukkan oleh C = $Q_a^2 + 3Q_b^2 + Q_a . Q_b$. Harga jual masing-masing barang per unit adalah $P_a = 7$ sedangkan $P_b = 20$. Hitunglah berapa unit masing-masing harus diproduksi agar keuntungannya maksimum dan besar keuntungan maksimum tersebut.

Jawab:

Penerimaan dari memproduksi A : $R_a = Q_a . P_a = 7 Q_a$
Penerimaan dari memproduksi B : $R_b = Q_b . P_b = 20 Q_b$

Penerimaan total: $R = R_a + R_b = 7 Q_a + 20 Q_b$

Fungsi Keuntungannya : $\pi = R - C$

$= 7 Q_a + 20 Q_b - (Q_a^2 + 3Q_b^2 + Q_a . Q_b)$

$= 7 Q_a + 20 Q_b - Q_a^2 - 3Q_b^2 - Q_a . Q_b)$

π maksimum bila $\pi' = 0$

$\pi Q_a = \frac{\partial \pi}{\partial Qa} = 0 \rightarrow 7 - 2 Q_a - Q_b = 0$ …….. (persamaan 1)

$\pi Q_b = \frac{\partial \pi}{\partial Qb} = 0 \rightarrow 20 - 6 Q_b - Q_a = 0$ …….. (persamaan 2)

Dari persamaan (1) dan (2) dapat diselesaikan dengan cara eliminasi atau subtitusi sehingga diperoleh $Q_a = 2$ dan $Q_b = 3$

Fungsi Keuntungannya : $\pi = R - C$

$= 7 Q_a + 20 Q_b - Q_a^2 + 3Q_b^2 + Q_a . Q_b$

$= 7 (2) + 20 (3) - (2)^2 - 3 (3)^2 - (2) (3)$

$= 37$

Jadi keuntungan maksimum perusahaan harus memproduksi 2 unit A dan 3 unit B dengan keuntungan sebesar 37.

Kasus dimana perusahaan memproduksi lebih dari suatu macam barang dengan biaya produksi gabungan, dapat pula diselesaikan melalui nilai-nilai marjinalnya yakni : Dengan memformulasikan penerimaan marjinal masing-masing barang yang sama dengan biaya marjinal barang yang bersangkutan **MR = MC**

π maksimum bila **;** $\mathbf{MR_a = MC_a}$ dan $\mathbf{MR_b = MC_b}$

Contoh :

Berkenaan contoh sebelumnya, π maksimum akan diperoleh bila ;
$R_a = MC_a$ dan $MR_b = MC_b$

$R = 7\,Q_a + 20\,Q_b$ $\qquad$ $C = Q_a^2 + 3Q_b^2 + Q_a \,.\, Q_b.$

$MR_a = R'_a = 7$ $\qquad$ $MC_a = C'_a = 2\,Q_{a+} Q_b$

$MR_b = R'_b = 20$ $\qquad$ $MC_b = C'_b = 6\,Q_{b+} Q_a$

$MR_a = MC_a \rightarrow\ 7 = 2\,Q_{a+} Q_b$

$7 - 2\,Q_a - Q_b = 0$ ..... persamaan 1

$MR_b = MC_b \rightarrow\ 20 = 6\,Q_{b+} Q_a$

$20 - 6\,Q_b - Q_a = 0$ ..... persamaan 2

Dari persamaan (1) dan (2) dapat diselesaikan dengan cara eliminasi atau subtitusi sehingga diperoleh nilai $Q_a = 2$ dan $Q_b = 3$. Selanjutnya nilai $\pi = 37$

III. Utilitas Marjinal Parsial Keseimbangan Konsumsi

B. Utilitas Marjinal Parsial

Dalam kenyataan sehari–hari, seorang konsumen tidak hanya mengkonsumsi satu macam barang tetapi beberapa macam. Jika kepuasan konsumen dilambangkan dengan U dan barang–barang yang dikonsumsinya dilambangkan dengan $q_i\,(i = ,2,.....n)$, maka fungsi utilitas dinotasikan dengan $U = f(q_1, q_2, q_3, ...q_n)$.

Maka fungsi utilitasnya adalah : **U = f (x, y)**

Derivatif pertama dari U merupakan utilitas marjinal parsialnya.

$\mathbf{MU_x} = \dfrac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}}$ adalah utilitas marjinal berkenaan dengan barang X

$\mathbf{MU_y} = \dfrac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{y}}$ adalah utilitas marjinal berkenaan dengan barang Y.

Contoh :

Diketahui fungsi utilitas barang K dan T adalah $U = k^4t^7$. Tentukan marjinal utilitasnya!

Jawab:

Fungsi utilitas : $U = k^4t^7$

Fungsi marjinal utilitas : $MU_{(k,t)} = U' = \dfrac{\partial U}{\partial (k,t)}$

Maka, $MU_k = U' = \dfrac{\partial U}{\partial k} = 4k^3t^7$ dan $MU_t = U' = \dfrac{\partial U}{\partial t} = 7k^4t^6$

Keseimbangan Konsumsi. Keseimbangan konsumsi maksudnya ialah suatu keadaan atau tingkat kombinasi konsumsi beberapa macam barang yang memberikan kepuasan optimum.

Garis anggaran adalah garis yang mencerminkan kemampuan konsumen membeli berbagai macam barang berkenaan dengan harganya masing – masing dan pendapatan konsumen.

Jika pendapatan konsumen sebesar M dan harga barang x dan y adalah P_x dan P_y per unit, maka **persamaan *budget line*** dapat dituliskan dengan : $\mathbf{M = xP_x + yP_y}$

B. Keseimbangan Konsumsi

Tingkat kombinasi konsumsi yang memberikan kepuasan optimum dapat dicari dengan motode lagrange. **Metode lagrange** adalah metode dengan membentuk sebuah fungsi baru yaitu menjumlahkan fungsi yang akan dioptimumkan ditambah hasil kali pengganda lagrange dengan fungsi kendalanya. Dalam materi ini, berarti fungsi utilitas U = f (x,y) dimaksimumkan terhadap fungsi anggaran $M = xP_x + yP_y$.

Sesuai dengan metode lagrange, diperoleh fungsi baru:

$F(x,y) = f(x,y) + \lambda(xP_x + yP_y - M)$

Syarat agar F maksimum:

$F_x(x,y) = 0 \rightarrow f_x(x,y) + \lambda P_x = 0$ ..... (1)

$F_y(x,y) = 0 \rightarrow f_y(x,y) + \lambda P_y = 0$ ..... (2)

Selanjutnya perhatikan:

Utilitas total : U = f (x,y)

Utilitas marjinal : MU = U' = f'(x,y)

i. Utilitas marjinal barang x : $MU_x = \frac{\partial U}{\partial x} = f_x(x,y)$

ii. Utilitas marjinal barang y : $MU_y = \frac{\partial U}{\partial y} = f_y(x,y)$

Sehingga : $f_x(x,y) + \lambda P_x = 0 \rightarrow -\lambda = \frac{fx(x,y)}{Px}$

$f_y(x,y) + \lambda P_y = 0 \rightarrow -\lambda = \frac{fy(x,y)}{Py}$

$$\mathbf{\frac{fx(x,y)}{Px} = \frac{fy(x,y)}{Py}}$$

$$\mathbf{\frac{MUx}{Px} = \frac{MUy}{Py}}$$

Contoh 1 :

Seorang konsumen mengkonsumsi barang X dan Y, dicerminkan oleh fungsi utilitas $U = x^2y^3$. Jumlah pendapatannya Rp 1.000, harga X dan harga Y per unit masing-masing Rp 25 dan Rp 50. Tentukan:

a) Bentuk fungsi utilitas marjinal untuk masing-masing barang
b) Utilitas marjinal jika konsumen mengkonsumsi 14 unit x dan 13 unit y
c) Jelaskan apakah dengan mengkonsumsi 14 unit x dan 13 unit y kepuasan konsumen optimum atau tidak.

Jawab :

a) $U = x^2y^3 \rightarrow MU_x = 2xy^3$
$MU_y = 3x^2y^2$

b) Jika x = 14 dan y = 13,
$MU_x = 2xy^3 = 2(14)(13)^3 = 61.516$
$MU_y = 3x^2y^2 = 3(14)^2(13)^2 = 99.372$

c) $\frac{MUx}{Px} = \frac{61.516}{25} = 2.460,64$
$\frac{MUy}{Py} = \frac{99.372}{50} = 1.987,44$

Karena $\frac{MUx}{Px} \neq \frac{MUy}{Py}$ berarti konsumsi 14 unit x dan 13 unit y kepuasan konsumen tidak optimum.

Contoh 2 :

Agar MU_x dan MU_y pada soal 1 seimbang, maka:
a) Hitunglah kombinasi konsumsi X dan Y yang memberikan kepuasan optimum!
b) Berapa besarnya kepuasan optimum?
c) Buktikan tingkat kepuasan optimum!

Jawab:

Diketahui : Fungsi utilitas 2 macambarang X dan Y : $U = x^2y^3$
Pendapatan konsumen : M = 1000
Harga X per unit : Px = 25
Harga Y per unit : Py = 50
Fungsi anggaran : 25x + 50y = 100

a) Mencari Kombinasi Konsumsi
Fungsi tujuan yang dioptimumkan ; Fungsi utilitas : $U = x^2y^3$
Fungsi kendala/syarat ; Fungsi anggaran : 25x + 50y = 1000
25x + 50y – 1000 = 0

Fungsi Lagrange ; $F(x,y,\lambda) = x^2y^3 + \lambda\,(25x + 50y - 1000)$
$= x^2y^3 + 25\,\lambda\,x + 50\,\lambda\,y - 1000\,\lambda$

Agar F maksimum → **F' = 0**

$F_x = 0$ → $F_x = 2xy^3 + 25\,\lambda = 0$ → $\lambda = -\frac{2xy^3}{25}$ …….. (1)

$F_y = 0$ → $F_y = 3x^2y^2 + 50\,\lambda = 0$ → $\lambda = -\frac{3x^2y^2}{50}$ ……. (2)

Mencari nilai y dan x → karena λ pada persamaa (1) dan (2) sama maka :

$$-\frac{2xy^3}{25} = -\frac{3x^2y^2}{50} \rightarrow \frac{2xy^3}{25} = \frac{3x^2y^2}{50}$$
$$50(2xy^3) = 25(3x^2y^2)$$
$$100xy^3 = 75x^2y^2$$
$$\frac{y^3}{y^2} = \frac{75x^2}{100x} \rightarrow y = \frac{3}{4}x \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Substitusi persamaan (3) ke fungsi syarat (fungsi anggaran) :

$y = \frac{3}{4}x$ → $25x + 50y = 0$
$25x + 50(\frac{3}{4}x) = 1000$
$25x + \frac{150}{4}x = 1000$
$\frac{250}{4}x = 1000$
$x = 1000.\frac{4}{250} \rightarrow \mathbf{x = 16}$

$y = \frac{3}{4}x \rightarrow y = \frac{3}{4}.16 \rightarrow \mathbf{y = 12}$

Jadi kombinasi konsumsi yang memberikan kepuasan optimum adalah 16 unit X dan 12 unit Y

b) Mencari besarnya kepuasan optimum : $U = X^2Y^3$
$U = (16)^2(12)^3 = 442368$

c) Pembuktian ; Untuk x = 16 dan y = 12

$$\frac{MU_X}{P_X} = \frac{MU_Y}{P_Y}$$
$$\frac{2xy^3}{25} = \frac{3x^2y^2}{50}$$
$$\frac{2(16)(12)^3}{25} = \frac{3(16)^2(12)^2}{50}$$
$$2211{,}84 = 2211{,}84$$

Terbukti tingkat kepuasan optimum → $\frac{MU_X}{P_X} = \frac{MU_Y}{P_Y}$

IV. Produk Marjinal Parsial dan Keseimbangan Produksi

A. Produk Marjinal Parsial

Untuk memproduksi sesuatu barang pada dasarnya diperlukan beberapa macam faktor produksi seperti tanah, modal, tenaga kerja, bahan baku, meisn–mesin dan sebagainya.

Sebagian dari masukan yang digunakan sudah barang tentu merupakan masukan tetap, sementara sebagian lainnya adalah masukan variabel. Selanjutnya jika untuk memproduksi suatu barang dianggap hanya ada dua macam masukan variabel (katakanlah K dan L), maka fungsi produksinya :

$$\mathbf{P = f\,(k,\, l)}$$

Derivatif pertama dari P merupakan produk marjinal parsialnya.

$\frac{\partial P}{\partial k}$ adalah produk marjinal berkenaan dengan masukan K

$\frac{\partial P}{\partial I}$ adalah produk marjinal berkenaan dengan masukan L

Keseimbangan Produksi. Keseimbangan produksi maksudnya ialah suatu keadaan atau tingkat penggunaan kombinasi faktor – faktor produksi secara optimum, yakni suatu tingkat pencapaian produksi dengan kombinasi biaya terendah *(least cost combination).* Secara geometri, keseimbangan produksi terjadi pada persinggungan garis biaya yang sama (***isocost***) dengan kurva produksi yang sama (***isoquant*** *).*

Isocost adalah kurva yang mencerminkan kemampuan produsen membeli berbagai masukan berkenaan dengan harga masing–masing masukan dan jumlah dana yang dimilikinya.

Jika pendapatan konsumen sebesar M dan harga barang x dan y adalah P_x dan P_y per unit, maka persamaan ***budget line*** dapat dituliskan dengan :

$$\mathbf{M = kP_k + lP_l}$$

B. Keseimbangan Produksi

Tingkat kombinasi produksi yang optimum dapat dicari dengan motode lagrange.

Fungsi produksi **P = f (k,l)** dimaksimumkan terhadap fungsi isocost **$M = kP_k + lP_l$**.

Tahapan penyelesaian :

Fungsi tujuan yang dioptimumkan ; Fungsi Produksi : **P = f (k,l)**

Fungsi kendala/syarat ; Fungsi Isocost : **$M = kP_k + lP_l \rightarrow kP_k + lP_l - M = 0$**

Fungsi baru : Fungsi Lagrange : **$F(k,l,\lambda) = f(k,l) + \lambda\,(kP_k + lP_l - M)$**

$$= f(k,l) + kP_k\lambda + lP_l\lambda - M\lambda$$

Agar F maksimum $\rightarrow$ F’ = 0

$\mathbf{F_k}(k,l) = 0 \rightarrow f_k(k,l) + \lambda P_k = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{fk(k,l)}{Pk}$ ..... (1)

$\mathbf{F_l}(k,l) = 0 \rightarrow f_l(k,l) + \lambda P_l = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{fl(k,l)}{Pl}$ ..... (2)

Selanjutnya perhatikan:

Produksi total : P = f(k,l)

Produksi marjinal : MU = U' = f'(k,l)

i. Utilitas marjinal barang k : $MU_k = \frac{\partial U}{\partial k} = f_k(k,l)$

ii. Utilitas marjinal barang l : $MU_l = \frac{\partial U}{\partial l} = f_l(k,l)$

karena λ pada persamaa (1) dan (2) sama maka : $-\frac{fk(k,l)}{Pk} = -\frac{fl(k,l)}{Pl}$

Dengan demikian, syarat keseimbangan produksi dapat juga dirumuskan :

$$\frac{\mathbf{f_k(k,l)}}{\mathbf{P_k}} = \frac{\mathbf{f_l(k,l)}}{\mathbf{P_l}}$$

$$\frac{\mathbf{MP_k}}{\mathbf{P_k}} = \frac{\mathbf{MP_l}}{\mathbf{P_l}}$$

Contoh 1 :

Diketahui : Fungsi Produksi → $P = 6k^{2/3}l^{1/3}$

a) Tentukan fungsi produksi marjinal untuk masing-masing fakor produksi!

b) Berapa produk marjinal jika digunakan 8 unit K dan 27 unit L?

c) Buktikan bahwa $\frac{MP_K}{P_k} = \frac{MP_L}{P_l}$ untuk harga per unit K adalah 27 dan L adalah 4

Jawab:

a) Fungsi Produksi Marjinal

$$MP_k = \frac{\delta P}{\delta k} = 4\,k^{-1/3}l^{1/3} = \frac{4l^{1/3}}{k^{1/3}}$$

$$MP_l = \frac{\delta P}{\delta l} = 2\,k^{2/3}l^{-2/3} = \frac{2k^{2/3}}{l^{2/3}}$$

b) Mencari Nilai Produk Marjinal, untuk k = 8 dan l = 27

$$MP_k = \frac{\delta P}{\delta k} = 4\,k^{-1/3}l^{1/3} = \frac{4l^{1/3}}{k^{1/3}}$$

$$= \frac{4(27)^{1/3}}{(8)^{1/3}} = \frac{4\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{4(3)}{2} = 6$$

$$MP_l = \frac{\delta P}{\delta l} = 2\,k^{2/3}l^{-2/3} = \frac{2k^{2/3}}{l^{2/3}}$$

$$= \frac{2(8)^{2/3}}{(27)^{2/3}} = \frac{2\sqrt[3]{8^2}}{\sqrt[3]{27^2}} = \frac{2\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{729}} = \frac{2(4)}{9} = \frac{8}{9}$$

c) Pembuktian $\frac{MP_K}{P_k} = \frac{MP_L}{P_l}$ dengan $P_k = 4$ dan $P_l = 27$

$$\frac{MP_k}{P_k} = \frac{Mp_l}{P_l} \rightarrow \frac{4\,k^{-1/3}\,l^{1/3}}{P_k} = \frac{2\,k^{2/3}\,l^{-2/3}}{P_l}$$

$$\frac{\frac{4(27)^{1/3}}{(8)^{1/3}}}{27} = \frac{\frac{2(8)^{2/3}}{(27)^{2/3}}}{4}$$

$$\frac{\frac{4\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}}}{27} = \frac{\frac{2\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{729}}}{4}$$

$$\frac{\frac{4(3)}{2}}{27} = \frac{\frac{2(4)}{9}}{4}$$

$$\frac{6}{27} = \frac{8/9}{4}$$

$$\frac{6}{27} = \frac{8}{36}$$

$$\mathbf{\frac{2}{9} = \frac{2}{9}}$$ (terbukti)

Soal-Soal Latihan

1. Identifikasi fungsi Marginal (turunan) dari fungsi-fungsi dibawah ini:
   a. Jika fungsi permintaan akan suatu komoditi yang memenuhi persamaan **Q = 20 – 0,2 P.** Tentukan fungsi Marginal Revenue-nya.
   b. Jika **AVC = Q – 85**, sedangkan **AFC = 50/Q**. Tentukan fungsi Marginal Cost-nya.
   c. Jika fungsi produksi $\mathbf{P = -5Q^2 + QR - 6R^2}$. Tentukan Partial Marginal Production (derivative parsialnya)

2. Fungsi permintaan dan penawaran akan suatu barang adalah sebagai berikut: **P = 1200 – 40Q** dan **P = 200 + 40Q**. Pemerintah mengenakan pajak perunit barang. Tentukan :
   a. Besarnya penerimaan pajak maksimum yang diterima pemerintah ?
   b. Besarnya pajak per unit barang yang ditetapkan pemerintah ?

3. Jika fungsi penerimaan **$R = -3Q^2 + 45.000Q$**, sedangkan biaya variabel yang dikeluarkan **$VC = 3Q^2 - 75.000Q$** dan Biaya Tetapnya sebesar **Rp. 6.000.000,-**
   a. Tentukan tingkat produksi yang menghasilkan keuntungan maksimum.
   b. Berapa besarnya keuntungan maksimum tersebut.

4. Fungsi permintaan dan fungsi Penawaran terhadap suatu barang sebagai berikut:
   $Q = 6.300 – 50P$ dan **$Q = P^2 + 20P - 1.500$.**
   Tentukan elastisitas permintaan dan elastisitas penawaran pada Keseimbangan Pasar dan sebutkan sifat elastisitas-elastisitas tersebut.

5. Biaya Total yang dikeluarkan suatu perusahaan untuk memproduksi 2 macam barang **V** dan **W** adalah **$C = V^2 + W^2 – V W$.** Tentukan:
   a. Kombinasi V dan W yang diproduksi agar biaya total yang dikeluarkan minimum, jika disyaratkan anggaran yang dimiliki 18 dan masing masing harga V dan W adalah 1:1. (Dengan Metode Lagrange!)

DAFTAR PUSTAKA

Assuari, Sofyan. (1996). Matematika Ekonomi. Jakarta ; Rajawali

Chiang, Alpha. (2006). Dasar-dasar Matematika Ekonomi. Jilid 1 & 2. Jakarta ; Penerbit Erlangga.

Dumairy. (2006) . Matematika Terapan Untuk Bisnis Dan Terapan. Yogyakarta : BPFE.

https://www.wardayacollege.com/matematika/aljabar/bentuk-aljabar/

https://www.advernesia.com/blog/matematika/sifat-komutatif-asosiatif-dan-distributif

Johanes, H dan Sri Handoko, Budiono. 1983. Pengantar Matematika untuk Ekonomi. Jakarta : LP3S.

Josep Bintang Kalangi. (2005). Matematika Ekonomi dan Bisnis. Buku 1 & 2. Jakarta; Salemba Empat.

Mesra B. (2016). Penerapan Ilmu Matematika Ekonomi & Bisnis. Yogyakarta : Deepublish.

Nababan, M. (1994). Pengantar Matematika Untuk Ilmu Ekonomi & Bisnis. Jakarta : Erlangga.

Nugroho, B.Yuliarto. (2014). Matematika Ekonomi dan Bisnis. Jakarta : Rajawali Press.

Santoso, Ettij Iswanti. (2006). Matematika Ekonomi Fungsi & Aplikasi. Cetakan 1. Yogyakarta : Graha Ilmu.

Sunyoto, Danang. (2011). Matematika Ekonomi dan Bisnis. Cetakan 1, Yogyakarta : CAPS

SILABUS MATA KULIAH

MATA KULIAH : Matematika Ekonomi

KODE/Status MK : EA420 (Wajib)

SKS/SEMESTER : 3 / I(Ganjil)

PRASYARAT : Non Prasyarat

1. **Tujuan Umum Mata kuliah**

   Setelah mempelajari mata kuliah **Matematika Ekonomi** ini diharapkan mahasiswa mampu dan memahami tentang Konsep teoritis dasar-dasar aljabar dan kegunaan ilmu matematika, Fungsi Linear, Aplikasi fungsi linear dalam ekonomi, Fungsi Kuadrat, Aplikasi Fungsi Kuadrat dalam Ekonomi Differensial Sederhana, Aplikasi Differensial Sederhana dalam Ekonomi,Diffrensial Multivariabel,Aplikasi Differensial MultivariabelNilai ekstrim, General Reviews

   Tujuan yang berkaitan dengan pengembangan kepribadian (soft-skill) adalah:

Deskripsi	
Pengembangan keterampilan teknis	Ada
Pengembangan keterampilan analitikal	Ada
Pengembangan keterampilan penetapan tujuan (goal setting)	Ada
Pengembangan keterampilan mengelola waktu	Ada
Pengembangan keterampilan menulis	Ada
Pengembangan keterampilan presentasi (public speaking)	
Pengembangan keterampilan kerjasama kelompok	Ada
Pengembangan kepercayaan diri	Ada
Pengembangan keterampilan memecahkan masalah	Ada
Pengembangan keterampilan Bahasa Inggris	

2. **Deskripsi mata kuliah ini adalah** :

Mata kuliah ini mendeskripsikan tentang arti dan kegunaan matematika dalam ekonomi, aplikasi fungsi linear dalam ekonomi, aplikasi fungsi kuadrat dalam ekonomi, aplikasi defferensial sederhana dalam ekonomi dan apliaksi defferensial multi variabel

3. **Metode Pembelajaran**
   a. Ceramah
   b. Diskusi
   c. Tanya jawab
   d. Kasus

4. Media
   a. Papan Tulis
   b. LCD Projector
   c. Modul
   d. Kertas Kerja

5. Evaluasi
   a. Kehadiran
   b. Tugas & Quiz
   c. UTS
   d. UAS

6. **Garis Besar Materi Pertemuan** :

PERTEMUAN	TOPIK
1	Konsep teoritis dasar-dasar aljabar dan kegunaan ilmu matematika
2	Fungsi Linear
3-4	Aplikasi fungsi linear dalam ekonomi
5	Fungsi Kuadrat
6-7	Aplikasi Fungsi Kuadrat dalam Ekonomi
8	UTS
9	Differensial Sederhana
10-11	Aplikasi Differensial Sederhana dalam Ekonomi
12	Diffrensial Multivariabel

13-14	Aplikasi Differensial Multivariabel dan Nilai ekstrim
15	General Reviews
16	UAS

7. Literatur

1. Haeussier, Jr Ernest F dan Richard S. Paul, (1986) " Introduction Mathematical Analysis for Business, economic and the life and social science, Ed, 5, Prentice Hall
2. Wahyu Hidayat, Matematika Ekonomi (2001)
3. Dumairy, Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi, BPFE Yogyakarta (2003)
4. Dumairy , Soal-Jawab Matematika Ekonomi (2001)

8. Makalah Akhir
   a. Makalah akhir dibuat perorangan dan bersifat orisinil;
   b. Topic makalah adalah pedalaman salah satu topic yang dibahas dalam kuliah, setelah terlebih dahulu dikonsultasikan dengan instruktur;
   c. Peserta diharapkan mencari referensi sebanyak-banyaknya dari CD-ROM database, jurnal ilmiah di perpustakaan, dan sumber lainnya
   d. Susunan makalah mengikuti kerangka skripsi, diketik di atas kertas kuarto atau A4, 11/2 spasi, jumlah halaman 15-20 halaman;
   e. Makalah dikumpulkan selambat-lambatnya dua minggu sebelum ujian akhir.

9. Evaluasi Hasil Pembelajaran

Tugas	20%
Ujian Tengah Semester	30%
Ujian Akhir Semester	50%
	100%

10. Kehadiran

Sesuai dengan aturan Fakultas Ekonomi Universitas Persada Indonesia Y.A.I, ketidakhadiran tanpa keterangan maksimum adalah 20%. Bagi mereka yang tingkat ketidakhadirannya lebih dari 20% tidak diperbolehkan mengikuti ujian akhir

11. Plagiarisme

Plagiarisme adalah memasukan kata/kata/kalimat/ide orang lain sebagian atau seluruhnya tanpa menyebutkan sumbernya. Jika mahasiswa memasukan kata-kata/kalimat dan menulis lain, harus disebutkan sumbernya.

Plagiarisme termasuk juga menyalin (mengopi) sebagian atau seluruh pekerjaan mahasiswa lain atau menyalin (mengkopi) dari buku, jurnal, web, majalah Koran dan lain-lain. Plagiarisme juga mencakup oto – plagiarism yaitu memasukan kata-kata/kalimat/ide sendiri yang berasal dari tugas/makalah yang telah dikumpulkan untuk penilaian dengan tanpa menyabutkan sumbernya.

Sesuai dengan aturan tata tertib dank ode kemahasiswaan seperti yang tercantum di Buku Pedoman FE UPI Y.A.I, mahasiswa dilarang melakukan plagiarism dan akan dikenakan sanksi jika terbukti melakukan plagiarism.

Sanksi jika melakukan plagiarism:

- Satu kali, sekurang-kurangnya makalah diberi nilai nol maksimum E
- Dua kali, mata ajaran terkait diberi nilai D
- Tiga kali, dikeluarkan dari FE UPI Y.A.I

Bagi mahasiswa yang mendapatkan tugas membuat makalah/paper, harus menyertakan *Statement of Authorship* berikut ini di halaman depan makalah/paperny

12. Statament of Authorship

"*Saya/kami yang bertandatangan dibawah ini menyatakan bahwa makalah/tugas terlampir adalah murni hasil pekerjaan saya/kami sendiri. Tidak ada pekerjaan orang lain yang saya/kami gunakan tanpa menyebutkan sumber.*

Materi ini tidak/belum pernah disajikan/digunakan sebagai bahan untuk makalah/tugas pada mata ajaran lain kecuali saya/kami menyatakan dengan jelas bahwa saya/kami menyatakan bahwa saya/kami menggunakannya.

Saya/kami memahami bahwa tugas yang saya/kami kumpulkan ini dapat diperbanyak dan atau dikomunikasikan untuk mendeteksi adanya plagiarism"

Nama	:
NPM	:
Tandatangan	:
Mata Ajaran	:
Judul Makalah/Tugas	:
Tanggal	:
Dosen	:

(Dibuat oleh seluruh anggota kelompok

FAKULTAS EKONOMI UPI Y.A.I
PROGRAM STUDI AKUNTANSI S-1
SATUAN ACARA PERKULIAHAN (SAP)
Mata Kuliah : Matematika Ekonomi

Deskripsi : Mata kuliah ini mendeskripsikan tentang arti dan kegunaan matematika dalam ekonomi, aplikasi fungsi linear dalam ekonomi, aplikasi fungsi kuadrat dalam ekonomi, aplikasi defferensial sederhana dalam ekonomi dan apliaksi defferensial multi variabel

Metode :
a. Ceramah
b. Diskusi
c. Tanya Jawab

Media :
a. Papan Tulis
b. LCD Projector
c. Modul
d. Kertas Kerja

Evaluasi :
a. Kehadiran
b. Tugas & Quis
c. Ujian Tengah Semester
d. Ujian Akhir Semester

Tatap Muka Ke	Kompetensi Dasar	Indikator	Materi Pokok dan Sub Materi Pokok	Sumber Belajar	Bobot Nilai (%)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1	Agar Mahasiswa mampu menguasai konsep teoritis dasar-dasar aljabar dan kegunaan ilmu matematika	Setelah mengikuti materi dalam pokok bahasan ini, mahasiswa dapat mengetahui dan memahami tentang formula bilangan berpangkat, formula special produk, dan dapat mengerjakan latihan dan soal-soal	Pendahuluan: a. Formula bilangan berpangkat b. Formula special produck c. Latihan dan Soal	1,3	100
2	Mahasiswa mampu menguasai tentang fungsi linear serta mampu memilih metode yang sesuai di dalam pembentukan fungsi linear	Setelah mengikuti materi dalam pokok bahasan ini, mahasiswa dapat memahami dan mengetahui pembentukan fungsi linear, koordinat titik potong, membuat grafik dan dapat menyelasaikan soal-soal dan latihan	Fungsi Linear a. Pembentukan fungsi linear b. Koordinat titik potong c. Grafik d. Latihan soal	1,3	100

3	Mahasiswa mampu menyelesaikan aplikasi fungsi linear dalam ekonomi serta dapat memformulasikan didalam pembahasan soal-soal latihan	Setelah mengikuti materi dalam pokok bahasan ini, mahasiswa dapat memahami tentang fungsi permintaan, fingsi penawaran, keseimbangan pasar serta dapat menjelaskan bagaimana efek subsidi dan pajak terhadap keseimbangan pasar dan menyelesaikan soal	Aplikasi fungsi linear dalam ekonomi a. Fungsi permintaan b. Fungsi penawaran c. Keseimbangan pasar d. Efek pajak dan subsidi dalam keseimbangan pasar e. Latihan soal	1,3	100
4	Mahasiswa mampu menyelesaikan aplikasi fungsi linear dalam ekonomi serta dapat memformulasikan didalam pembahasan soal-soal latihan	Setelah mengikuti materi dalam pokok bahasan ini, mahasiswa dapat memahami tentang fungsi biaya, fungsi penerimaan, analisa pulang pokok, dan fungsi laba sekaligus mampu dalam penyelesaian soal-soal dan latihan	Aplikasi fungsi linear dalam ekonomi a. Fungsi biaya b. Fungsi penerimaan c. Analisa pulang pokok d. Fungsi laba	1,3	100
5	Mahasiswa mampu menguasai konsep teoritis dan menganalisa tentang fungsi kuadrat	Setelah mengikuti materi dalam pokok bahasan ini mahasiswa dapat mengetahui dan mengidentifikasi tentang nilai ekstrim (maksimum dan minimum) serta dapat menggambarkan grafik fungsi kuadrat	Fungsi Kuadrat a. Nilai ekstrim: maksimum dan minimum b. Grafik fungsi kuadrat	2,3	100
6	Mahasiswa mampu menguasai konsep teoritis dan menyelesaikan tentang aplikasi fungsi kuadrat	Setelah mengikuti materi pada pokok bahasan ini mahasiswa dapat menjelaskan dan memahami tentang keseimbangan pasar serta efek pajak dan subsidi terhadap keseimbangan pasar	Aplikasi Fungsi Kuadrat dalam Ekonomi a. Keseimbangan pasar b. Efek pajak dan subsidi terhadap keseimbangan pasar	2,3	100
7	Mahasiswa mampu menguasai konsep teoritis dan menyelesaikan tentang aplikasi fungsi kuadrat	Setelah mengikuti materi pada pokok bahasan ini mahasiswa dapat menjelaskan dan memahami tentang fungsi biaya, ekstrim fungsi penerimaan dan laba ekstrim	Aplikasi Fungsi Kuadrat dalam Ekonomi a. Fungsi biaya, nilai ekstrim b. Fungsi penerimaan, nilai ekstrim c. Laba, ekstrim d. Latihan soal	2,3	100

8	**Ujian Tengah Semester**				
9	Mahasiswa mampu menguasai tentang teori differensial sederhana serta dapat memformulasikan dalam penyelesaian pembahasan soal-soal	Setelah mengikuti materi pada pokok bahasan ini mahasiswa dapat menjelaskan dan menggunakan kaidah-kaidah differensial dan nilai ekstrim fungsi	Differensial Sederhana a. Kaidah-kaidah differensial b. Nilai ekstrim fungsi c. Latihan soal	1,3	100
10	Mahasiswa mampu menguasai konsep dan menggunakan aplikasi differensial sederhana di dalam ekonomi	Setelah mengikuti materi dalam pokok bahasan ini mahasiswa dapat menjelaskan dan memahami tentang konsep nilai marjinal, elastisitas, nilai ekstrim dan penerimaan pajak maksimum	Aplikasi Differensial Sederhana dalam Ekonomi a. Konsep nilai marjinal b. Elastisitas c. Latihan soal	1,3	100
11	Mahasiswa mampu menguasai konsep dan menggunakan aplikasi differensial sederhana di dalam ekonomi	Setelah mengikuti materi dalam pokok bahasan ini mahasiswa dapat menjelaskan dan memahami tentang nilai ekstrim (penerimaan, biaya, laba) dan penerimaan pajak maksimum	Aplikasi Differensial Sederhana dalam Ekonomi a. Nilai ekstrim : penerimaan, biaya, laba b. Penerimaan pajak maksimum c. Latihan soal	1,3	100
12	Mahasiswa mampu menguasai dan menjelaskan konsep tentang differensial multivariable	Setelah mengikuti materi dalam pokok bahasan ini, mahasiswa dapat mengetahui dan memahami tentang nilai-nilai ekstrim multivariable, kaidah-kaidah lagrange dengan mengerjakan soal-soal latihan	Diffrensial Multivariabel a. Nilai-nilai ekstrim multivariable b. Kaidah-kaidah lagrange c. Latihan soal	1,3	100
13	Mahasiswa mampu menguasai konsep dan menggunakan aplikasi differensial multivariabel dalam ekonomi	Setelah mengikuti materi dalam pokok bahasan ini mahasiswa dapat menjelaskan dan memahami tentang nilai ekstrim (penerimaan, biaya, laba) secara multivariabel	Aplikasi Differensial Multivariabel Nilai ekstrim • Penerimaan • Biaya • Latihansoal	2,3	100
14	Mahasiswa mampu menguasai konsep dan menggunakan aplikasi	Setelah mengikuti materi dalam pokok bahasan ini mahasiswa dapat	Aplikasi Differensial Multivariabel Nilai ekstrim	2,3	100

	differensial multivariabel dalam ekonomi	menjelaskan dan memahami tentang nilai ekstrim (utilitas, produksi) secara multivariabel	• Utilitas • Produksi • Latihan soal		
15	Mahasiswa mampu menguasai konsep secra teoritis tentang matematika ekonomi serta dapat memilih metode yang sesuai dalam peberapan ekonomi	Setelah mengikuti seluruh materi matematika mahasiswa mampu menjelaskan dan memberikan tanggapan terhadap materi-materi yang belum dipahami	General Reviews	2,3,4	100
16	**Ujian Akhir Semester**				

Sumber Bacaan (Literatur):

1. Haeussier, Jr Ernest F dan Richard S. Paul, (1986) " Introduction Mathematical Analysis for Business, economic and the life and social science, Ed, 5, Prentice Hall
2. Wahyu Hidayat, Matematika Ekonomi (2001)
3. Dumairy, Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi, BPFE Yogyakarta (2003)
4. Dumairy , Soal-Jawab Matematika Ekonomi (2001)

Jakarta, 10 September 2020

Kordinator

(Maya Safriana, MM)

Mengetahui
Ketua Program StudiS-1 Akuntansi

(Lely Indriati, SE.MM)